

## 8. LADĚNÍ MECHANICKÝCH SOUSTAV

Laděním mechanických soustav je nazýván postup, jímž měníme jejich hmotnost a tuhost tak, aby se dosáhlo požadovaných hodnot vlastních frekvencí a jim odpovídajících vlastních vektorů.

Pro jednoduchost budeme uvažovat volnou netlumenou mechanickou soustavu, která je popsána hmotnostními, tuhostními a geometrickými parametry. Tyto prvky tvoří *vektor ladících parametrů*:

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_{s_p}]^T$$

Vlastní čísla  $\lambda_i = \Omega_i^2$  a vlastní vektory, normované přes matici hmotnosti vyjádříme *vektorem laděných parametrů* (*vektorem naladění*):

$$\mathbf{l} = [\Omega_1^2, \Omega_2^2, \dots, \Omega_n^2, \mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T, \dots, \mathbf{v}_n^T]^T \quad (8.1.1)$$

Zpravidla nepožadujeme měnit při ladění všechny prvky vektoru naladění, ale pouze některé z nich. V takovém případě definujeme *vektor výběru*:  $\mathbf{j} = [j_i]$  rozměru  $k < s_p$ . Vektor výběru určuje ty prvky vektoru  $\mathbf{l}$ , kterým předepisujeme určité hodnoty. Tím vznikne *redukovaný vektor naladění*  $\mathbf{l}_r = [l_{r1}, l_{r2}, \dots, l_{rk}]^T$ . Často se požaduje u řešené soustavy pouze dodržení hodnot vlastních frekvencí. V takovém případě mluvíme o *spektrálním ladění*. Jestliže chceme dodržet určité hodnoty vlastních vektorů pak se takový proces nazývá *modální ladění*. Vektor požadovaných hodnot laděných veličin označme  $\mathbf{l}^*$ , který je rozměru  $k$ . Dosažení tohoto vektoru provedeme změnami pouze vybraných prvků vektoru ladících parametrů. Vznikne tak *redukovaný vektor ladících parametrů*  $\mathbf{p}_r$ , jehož počet prvků bude  $s$ . V dalším budeme většinou bližší označení „redukovaný“ vynechávat a to jak u vektorů ladících parametrů tak u vektoru naladění a tedy budeme vynechávat i index  $r$ . Požadované laděné veličiny závisí na laděných parametrech, takže lze psát  $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\mathbf{p})$ . Ladění parametrů lze matematicky formulovat jako nalezení vektoru  $\mathbf{p}^*$  pro který platí:

$$\mathbf{l}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{l}^* \quad (8.1.2)$$

Ladící parametry, nezahrnuté do redukovaného vektoru ladících parametrů  $\mathbf{p}_r$  se při ladění nemění. Laděné veličiny, které mají zůstat zachovány je naproti tomu nutno zahrnout do redukovaného vektoru naladění  $\mathbf{l}_r$ . Na hodnotách laděných veličin nezahrnutých do vektoru naladění nám nezáleží.

## 8.1 Metoda postupných lineárních aproximací

Jestliže vektor laděných veličin  $\mathbf{l}(\mathbf{p})$  je v okolí výchozího bodu  $\mathbf{p}_0$  definovatelný, lze každou funkci  $l_i(\mathbf{p})$  rozvinout v okolí bodu  $\mathbf{p}_0$  do Taylorovy řady:

$$l_i(\mathbf{p}) = l_i(\mathbf{p}_0) + \sum_{i_1=1}^s \frac{\partial l_i(\mathbf{p}_0)}{\partial p_{i_1}} (p_{i_1} - p_{i_1}^{(0)}) + \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^s \sum_{i_2=1}^s \frac{\partial^2 l_i(\mathbf{p}_0)}{\partial p_{i_1} \partial p_{i_2}} (p_{i_1} - p_{i_1}^{(0)}) (p_{i_2} - p_{i_2}^{(0)}) + \frac{1}{3!} \sum_{i_1=1}^s \sum_{i_2=1}^s \sum_{i_3=1}^s \frac{\partial^3 l_i(\mathbf{p}_0)}{\partial p_{i_1} \partial p_{i_2} \partial p_{i_3}} (p_{i_1} - p_{i_1}^{(0)}) (p_{i_2} - p_{i_2}^{(0)}) (p_{i_3} - p_{i_3}^{(0)}) + \dots \quad (8.1.3)$$

V dalším budeme brát pouze první dva členy řady, to znamená, že budeme uvažovat lineární náhradu funkce  $l_i(\mathbf{p})$ . Zavedme vektor gradientu funkce  $l_i(\mathbf{p}_0)$ :

$$\text{grad } l_i(\mathbf{p}_0) = \left[ \frac{\partial l_i(\mathbf{p}_0)}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial l_i(\mathbf{p}_0)}{\partial p_{s_p}} \right]^T \quad (8.1.4)$$

Rov.(8.1.3) lze psát ve tvaru

$$l_i(\mathbf{p}) \doteq l_i(\mathbf{p}_0) + \text{grad}^T l_i(\mathbf{p}_0) (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, k \quad (8.1.5)$$

Dále zavedeme *Jacobiho matici zobrazení*

$$\mathbf{L}(\mathbf{p}_0) = \begin{bmatrix} \text{grad}^T l_1(\mathbf{p}_0) \\ \vdots \\ \text{grad}^T l_k(\mathbf{p}_0) \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial l_i(\mathbf{p}_0)}{\partial p_j} \right] \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, k \quad j = 1, 2, \dots, s$$

pak lze rov.(8.1.5) přepsat pro všechna  $i = 1, 2, \dots, k$  na tvar

$$\mathbf{l}(\mathbf{p}) \doteq \mathbf{l}(\mathbf{p}_0) + \mathbf{L}(\mathbf{p}_0) (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \quad (8.1.6)$$

Matice ladění je obecně obdélníková matice rozměru  $(k, s)$ . Její prvek v  $i$  řádku a  $j$  sloupci vyjadřuje míru změny  $i$  laděné veličiny na  $j$  změně ladícího parametru. Proto ji také lze nazvat *matice citlivosti*. V případě, že matice ladění je regulární a pro její hodnot platí

$$h\mathbf{L}(\mathbf{p}_0) = \min(k, s)$$

existuje pro případ  $k \geq s$  levá inverzní matice

$$\mathbf{L}^L(\mathbf{p}_0) = \mathbf{L}^T(\mathbf{p}_0) \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{p}_0) \mathbf{L}^T(\mathbf{p}_0)$$

a pro  $k \leq s$  pravá inverzní matice.

Pomocí těchto matic lze z rov.(8.1.6) určit vektor  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{p} \doteq \mathbf{p}_0 + \mathbf{L}^+(\mathbf{p}_0) \mathbf{l}(\mathbf{p}) - \mathbf{l}(\mathbf{p}_0) \quad (8.1.7)$$

$\mathbf{L}^+$  označuje buď pravou nebo levou inverzní matici.

*Poznámka:*

Matice  $\mathbf{A}^P = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}$  se nazývá *zprava inverzní regulární matice*  $\mathbf{A}$  typu  $(r, s_p)$  pro  $r \leq s$ . Matice  $(\mathbf{A} \mathbf{A}^T)$  je řádu  $r$  a existuje pro ni inverzní matice. Matice  $\mathbf{A}^P$  je typu  $(r, s_p)$  a platí pro ni  $\mathbf{A} \mathbf{A}^P = \mathbf{E}$ . Jestliže k nedourčené soustavě rovnic  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$  s regulární maticí  $\mathbf{A}$  píšeme  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^P \mathbf{b}$  pak tento vektor je řešením soustavy. Poněvadž v případě  $r > s_p$  má rovnice nekonečně mnoho řešení, vybírá se vektorem  $\mathbf{A}^P \mathbf{b}$  pouze jedno z nich.. Toto řešení má ze všech ostatních řešení minimální euklidovskou normu

$$\|\mathbf{A}^P \mathbf{b}\| = \min \|\mathbf{x}\|$$

Kde označujeme  $\|\cdot\|$  *euklidovskou normu*.

Jestliže nyní chceme řešit rov.(8.1.2), dostaneme s ohledem na rov.(8.1.6) a (8.1.7) vztah

$$\mathbf{p} \doteq \mathbf{p}_0 + \mathbf{L}^+(\mathbf{p}_0) \mathbf{l}^* - \mathbf{l}(\mathbf{p}_0) \quad (8.1.8)$$

Tento vztah je zatížen chybou, poněvadž

1. lineární náhrada rov.(8.1.6) je u nelineárních případů přibližná
2. pro případ  $r > s$  je řešení dané rov.(8.1.7) pouze nejlepším přiblížením.

Abychom zmenšili chybu tohoto řešení bereme rov.(8.1.8) jako iterační. Při tom použijeme obdobný vztah

$$\mathbf{p}_{l+1} = \mathbf{p}_l + \mathbf{L}^+(\mathbf{p}_l) \mathbf{l}^* - \mathbf{l}(\mathbf{p}_l) \quad \text{pro } l = 1, 2, \dots \quad (8.1.9)$$

Z počáteční hodnoty  $\mathbf{p}_0$  určíme první člen posloupnosti  $\mathbf{p}_l$  a postupně další členy. Pokud posloupnost  $\mathbf{p}_l$  konverguje označíme limitu  $\mathbf{p}^*$  za řešení rov.(8.1.2). Základním požadavkem pro řešení rov.(8.1.2) je dosažení co nejlepších požadovaných hodnot laděných veličin. Ladící proces rov.(8.1.9) ukončujeme, když je splněna rovnice

$$\sum_{j=1}^k g_j \left[ 1 - \frac{\mathbf{l}_j(\mathbf{p}_i)}{\mathbf{l}_j^*} \right]^2 \leq \varepsilon_1 \quad (8.1.10)$$

$\varepsilon_1$  je zvolené, malé, kladné číslo, určující dovolenou chybu hodnot laděných veličin.

$g_i$  jsou kladné váhové koeficienty, umožňující upřednostnit některou souřadnici laděných veličin. Rov.(8.1.10) pracuje s relativními chybami. Čtverce hodnot jsou zaváděny proto, že nám nezáleží na tom, zda jsou odchylky kladné nebo záporné. Při přesném řešení by měla být levá strana rov.(8.1.10) nulová, v ostatních případech je kladná.

V některých případech neexistuje přesné řešení rov.(8.1.2). Pro velmi malá  $\varepsilon_1$  nemusí být splněna nerovnice (8.1.10) nikdy a přesto postup podle rov.(8.1.9) může konvergovat. Proto se zavádí druhé kritérium zastavení výpočtu

$$\sum_{j=1}^{s_p} \left[ 1 - \frac{p_j^{(l+1)}}{p_j^{(l)}} \right]^2 \leq \varepsilon_2 \quad (8.1.11)$$

kde je opět zvolena malá relativní chyba  $\varepsilon_2$  ladících parametrů. Pokud by již nedocházelo ke změně ladících parametrů, byla by levá strana rov.(8.1.11) nulová.

Pokud by proces daný rov.(8.1.9) konvergoval, je nutno zastavit výpočet po pevně stanoveném počtu proběhlých iterací.

### 8.1.1 DYNAMICKÁ CITLIVOST A URČENÍ PRVKŮ MATICE LADĚNÍ

*Dynamická citlivost* lineárních mechanických soustav je definována jako změna vlastních čísel nebo vlastních vektorů na jednotkovou změnu konstrukčních tedy ladících parametrů. Dynamickou citlivost používáme pro volbu prvků matice ladění, ale i k opravě parametrů matematického modelu při identifikaci matematického modelu na základě experimentálně zjištěných vlastních hodnot a při parametrické optimalizaci

#### 8.1.1.1 Dynamická citlivost konzervativních soustav

Pro odvození dynamické citlivosti a tedy i prvků matice ladění, dané rov.(8.1.5) je nutno odvodit parciální derivace  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j}$  a  $\frac{\partial v_{ki}}{\partial p_j}$ . Zde značí  $\lambda_i = \Omega_i^2$  a  $v_{ki}$  je  $k$  prvek  $i$  vlastního vektoru.

$p_j$  je  $j$  ladící prvek. Jak bylo dříve odvozeno platí pro volnou netlumenou soustavu rovnice

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad (8.1.12)$$

kterou lze přepsat na tvar

$$\mathbf{K} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{M} \mathbf{v}_i \quad (8.1.13)$$

Když vynásobíme tuto rovnici zleva vektorem  $\mathbf{v}_i^T$  a je-li provedena normalizace vektoru přes matici hmotnosti  $\mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i = 1$  bude předchozí rovnice mít jednoduchý tvar:

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{K} \mathbf{v}_i = \lambda_i \quad (8.1.14)$$

Derivací rov.(8.1.13) podle  $p_i$  dostaneme:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} \mathbf{v}_i + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial p_j} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j} \mathbf{M} \mathbf{v}_i + \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \mathbf{v}_i + \lambda_i \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial p_j}$$

Vynásobením této rovnice zleva vektorem  $\mathbf{v}_i^T$  a využitím uvedené normalizace lze získat:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j} = \mathbf{v}_i^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \right) \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i^T \mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial p_j} \quad (8.1.15)$$

Transpozicí rov.(8.1.12) bychom dostali

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M} = \mathbf{0}^T$$

Aplikací této rovnice na rov.(8.1.15) dostaneme

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j} = \mathbf{v}_i^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \right) \mathbf{v}_i \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n \quad \text{a } j = 1, 2, \dots, s_p \quad (8.1.16)$$

Rov.(8.1.16) vyjadřuje *citlivost vlastního čísla*  $\lambda_i$  na změnu ladícího prvku  $p_j$ . Pro další řešení

vyjádříme  $\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial p_j}$  jako lineární kombinaci vlastních vektorů:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^n a_{ki}^{(j)} \mathbf{v}_i \quad (8.1.17)$$

Dosazením rov.(8.1.17) do rov.(8.1.15) obdržíme po úpravě rovnici, která platí pro mimodiagonální prvky:

$$\mathbf{v}_i^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} - \lambda_k \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \right) \mathbf{v}_k + \sum_{l=1}^n a_{ki}^{(j)} \mathbf{v}_i^T (\mathbf{K} - \lambda_k \mathbf{M}) \mathbf{v}_l = 0 \quad (8.1.18)$$

S ohledem na rov.(8.1.14) a normalizované vlastní vektory lze psát:

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_l = \delta_{il} \quad \mathbf{v}_i^T \mathbf{K} \mathbf{v}_l = \lambda_i \delta_{il} \quad (8.1.19)$$

kde  $\delta_{il}$  je Kroneckerův součinitel, pro který platí

$$\begin{aligned} \delta_{il} &= 1 \quad \text{pro } i = l \\ \delta_{il} &= 0 \quad \text{pro } i \neq l \end{aligned}$$

S použitím rov.(8.1.19) lze přepsat rov.(8.1.18) na tvar:

$$\mathbf{v}_i^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} - \lambda_k \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \right) \mathbf{v}_k + a_{ki}^{(j)} (\lambda_i - \lambda_k) = 0$$

odkud lze vyjádřit

$$a_{ki}^{(j)} = \frac{1}{\lambda_k - \lambda_i} \mathbf{v}_i^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} - \lambda_k \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \right) \mathbf{v}_k \quad (8.1.20)$$

Pokud jsou vlastní čísla  $\lambda$  stejná říkáme jim *násobná vlastní čísla* a při řešení se postupuje následovně:

Zderivujeme rovnici pro normalizaci vlastních vektorů podle  $p_j$ :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i^T}{\partial p_j} \mathbf{M} \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial p_j} = 0$$

Každý sčítanec tohoto výrazu je skalár. Prvý sčítanec vznikne transpozicí posledního, takže lze psát:

$$2\mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial p_j} = -\mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \mathbf{v}_i$$

Dosadíme-li do této rovnice výraz odpovídající rov.(8.1.17), získáme po úpravě

$$a_{ii} = -\frac{1}{2} \mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \mathbf{v}_i \quad (8.1.21)$$

Když dosadíme koeficienty dané rov.(8.1.20) a (8.1.21) do rov.(8.1.17) dostaneme vztah pro citlivost vlastních vektorů:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial p_j} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{\lambda_k - \lambda_i} \mathbf{v}_i^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \right) \mathbf{v}_k \mathbf{v}_i - \frac{1}{2} \mathbf{v}_k^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k \quad (8.1.22)$$

### 8.1.2 LADÍCÍ PROCES

Výchozím stavem je navržený mechanický model se zadaným hmotnostním, tuhostním a geometrickým uspořádáním, z něhož vyplyne matice hmotnosti  $\mathbf{M}$  a tuhosti  $\mathbf{K}$ . Dále musí být známo, které prvky úplného vektoru laděných veličin se budou měnit a na jaké hodnot. Ladící proces můžeme popsat následujícím algoritmem:

1. Provede se analýza navrženého mechanického modelu, to znamená určí se vlastní čísla  $\lambda_i = \Omega_i^2$  a k nim přiřazené vlastní vektory  $\mathbf{v}_i$ , které se znormují přes matici hmotnosti.
2. Podle požadavku ladících změn určíme vektor laděných veličin  $\mathbf{i} = [i_j]_{j=1}^s$ . Tím bude také určen vektor naladění  $\mathbf{l}$ .
3. Provedeme analýzu citlivosti původně navrženého mechanického modelu. Stanovíme tím číselné výchozí hodnoty matice ladění  $\mathbf{L}$ . Tato matice je dána plnou sloupcovou maticí rozměru  $s$  a zahrnujeme do ní všechny konstrukční parametry, které se mohou měnit.
4. Určí se vektor výběru ladících parametrů  $\mathbf{j} = [j_i]_{i=1}^s$ . Tím definujeme vektor ladících parametrů<sup>1)</sup>  $\mathbf{p}$ . Výběr ladících parametrů provádíme na základě analýzy citlivosti. Protože míru citlivosti určují absolutní hodnoty prvků matice ladění a jednotlivé ladící parametry odpovídají sloupcům této matice, je mírou citlivosti ladícího parametru velikost součtu absolutních hodnot sloupce matice  $\mathbf{L} = [l_{ij}]$  pro  $i = 1, 2, \dots, k$ ;  $j = 1, 2, \dots, s$ . Čím větší hodnota tohoto součtu  $\left( c_j = \sum_{i=1}^k |l_{ij}| \right)$ , tím vyšší citlivost.

<sup>1</sup> Počet ladících parametrů volíme pokud možno roven počtu požadavků  $k$ . V takovém případě je  $\mathbf{L}^* = \mathbf{L}^{-1}$  a řešení soustavy dané rov.(8.1.6) je přesné.

5. Zvolíme relativní chyby  $\varepsilon_1$  laděných veličin a  $\varepsilon_2$  ladících parametrů, maximální počet  $k_0$  iterací, případně váhové koeficienty  $g_i$  laděných veličin. Při použití jednoduché aritmetiky nemá cenu volit relativní chyby menší než  $10^{-8}$ . Pro případ  $s \geq k$  je výhodné volit  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  a to asi o dva řády. Číslo  $k_0$  není nutno volit větší než 10.
6. Rozhodneme o případném zavedení přípustné oblasti a o možnosti zkracování kroku  $\|\Delta \mathbf{p}\|$ . Zavedení přípustného kroku je nutné z důvodů fyzikálních vlastností modelu. Např. ladící parametry nemohou být záporné. Podle toho určíme dolní a horné *závory*. Může-li horní závora růst do nekonečna, volíme ji o několik řádů výš než je počáteční hodnota ladícího parametru.
7. Provede se vlastní ladění podle rov. (8.1.9).
8. Překontrolujeme výsledky ladícího procesu a způsob jeho sestavení. V případě jeho divergence zvolíme jiný postup (zmenšení kroku) a ladící proces opakujeme.
9. Provedeme kontrolní výpočet vlastních frekvencí a vlastních vektorů mechanické soustavy s novými parametry a výsledky srovnáme se stanovenými požadavky.