

Obsah

PŘEDMLUVA	V
1. ÚVOD.....	11
2. POHONOVÉ SOUSTAVY JAKO DYNAMICKÝ SYSTÉM.....	14
2.1. DYNAMICKÉ SYSTÉMY A JEJICH STRUKTURA. STAVOVÉ ROVNICE	14
2.1.1. <i>Množiny podstatných veličin</i>	15
2.1.2. <i>Relace v dynamických systémech</i>	16
2.1.3. <i>Principy a teorie systémů</i>	16
2.1.4. <i>Stavové rovnice dynamických systémů</i>	18
2.2. IDENTIFIKACE DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ	19
2.3. SIMULACE DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ. POČÍTAČOVÝ MODEL	20
3. MODELOVÁNÍ POHONOVÝCH SOUSTAV	22
3.1. POHYBOVÉ ROVNICE POHONOVÝCH SOUSTAV	24
3.1.1. <i>Metoda redukce hmotových a silových parametrů</i>	25
3.1.2. <i>Lagrangeovy rovnice druhého druhu</i>	27
3.1.3. <i>Lagrangeovy rovnice druhého druhu s multiplikátory</i>	30
3.1.4. <i>Hamiltonův princip</i>	31
3.2. MECHANICKÉ CHARAKTERISTIKY MOTORŮ A PRACOVNÍCH STROJŮ	33
3.2.1. <i>Mechanické charakteristiky zatížení</i>	34
3.2.1.1. <i>Odporové zatěžující momenty</i>	34
3.2.1.2. <i>Aktivní zatěžující momenty</i>	35
3.2.2. <i>Momentové charakteristiky motorů</i>	37
3.2.2.1. <i>Ideální charakteristiky motorů</i>	38
3.2.2.2. <i>Statické charakteristiky motorů</i>	39
3.2.2.3. <i>Dynamické charakteristiky motorů</i>	40
3.2.3. <i>Momentové charakteristiky vybraných typů motorů</i>	41
3.2.3.1. <i>Momentové charakteristiky asynchronního elektromotoru</i>	41
3.2.3.2. <i>Momentové charakteristiky stejnosměrného elektrického motoru s cizím buzením</i>	43
3.2.3.3. <i>Momentové charakteristiky stejnosměrného elektrického motoru se sériovým buzením</i>	44
3.2.3.4. <i>Momentové charakteristiky hydromotoru s objemovou regulací</i>	46
3.2.3.5. <i>Momentové charakteristiky vznětového spalovacího motoru</i>	47
3.3. NELINEÁRNÍ PRVKY A JEJICH CHARAKTERISTIKY	49
3.3.1. <i>Elektrické prvky</i>	51
3.3.2. <i>Mechanické prvky</i>	54
3.3.3. <i>Aproximace nelineárních charakteristik</i>	57
3.3.4. <i>Charakteristiky pružných a tlumících vazeb</i>	59

4. PORUCHY V POHONOVÝCH SOUSTAVÁCH.....	77
4.1. TECHNICKÉ POŽADAVKY NA DIAGNOSTICKÉ MĚŘÍCÍ SOUSTAVY	77
4.2. VIBRACE V POHONOVÝCH SOUSTAVÁCH	78
4.2.1. Oblast nízkých kmitočtů	79
4.2.2. Oblast středních kmitočtů	80
4.2.3. Oblast vysokých kmitočtů.....	84
4.2.4. Shrnutí projevů počínajících závad pohonových soustav	86
4.3. ZJIŠŤOVÁNÍ ZÁVAD POHONOVÝCH SOUSTAV	87
4.3.1. Analyzátoři založené na rychlé Fourierově transformaci	91
4.4. DIAGNOSTIKA PORUCH A ZÁVAD POHONOVÝCH SOUSTAV	96
4.4.1. Diagnostika poruch a závad užitím fáze	97
4.4.2. Diagnostika poruch a závad užitím kester	98
4.4.3. Diagnostika poruch a závad užitím obálky	100
4.4.4. Diagnostika poruch a závad užitím průměrování v čase	102
4.5. ZJIŠŤOVÁNÍ TENDENCÍ RŮSTU ZÁVAD POHONOVÝCH SOUSTAV	104
5. ANALÝZA DYNAMICKÝCH VLASTNOSTÍ POHONOVÝCH SOUSTAV.....	107
5.1. VÝPOČTOVÝ MODEL POHONU A JEHO POUŽITELNOST	107
5.1.1. Výpočtový model pohonové soustavy.....	108
5.1.2. Kritérium použitelnosti modelové soustavy pohonu.....	116
5.2. STABILITA A BIFURKACE ROVNOVÁŽNÝCH STAVŮ	119
5.2.1. Možnosti vzniku bifurkací rovnovážného stavu pohonu.....	123
5.2.1.1. Reálná bifurkace rovnovážného stavu pohonu	124
5.2.1.2. Komplexní bifurkace rovnovážného stavu pohonu.....	132
5.3. ODEZVA POHONOVÉ SOUSTAVY NA HARMONICKÉ BUZENÍ	139
5.3.1. Amplitudy a fázová posunutí ustálených vynucených kmitů.....	141
5.3.2. Stabilita ustálené odezvy pohonové soustavy.....	156
5.3.3. Topologické vlastnosti trajektorií ustálené odezvy pohonu	163
5.4. PŘECHODOVÉ DĚJE V POHONOVÉ SOUSTAVĚ	170
5.4.1. Doba rozběhu pohonové soustavy.....	171
5.4.2. Doba zastavení pohonové soustavy.....	180
DODATEK – PROSTŘEDKY VÝPOČTOVÉHO MODELOVÁNÍ.....	184
POUŽITÁ LITERATURA	191

Poděkování : Autoři děkují panu Doc. Ing. Jaroslavovi Kalousovi, CSc. za napsání „Dodatku“ a za jeho souhlas k publikaci.

Předmluva

S pohonovými soustavami se v inženýrské práci setkáváme doslova na každém kroku. Od miniaturních technických soustav, jakými jsou například pohony gyrokompasů, až k mnohatunovým rotorovým soustavám turbosoustrojí. Při technických návrzích takovýchto objektů je nutné na jedné straně respektovat oborové zvyklosti, na straně druhé ale bude vhodné hledat jednotící prvky, to co jednotlivé konstrukční postupy „spojuje“. Pro všechny tyto objekty je charakteristické, že je lze strukturovat, tyto struktury dále dekomponovat a hierarchicky uspořádat, že existují vazby uvnitř i vně objektu (mezi jednotlivými substrukturami, mezi objektem a jeho „okolím“, mezi více objekty apod.), že objekt má konkrétní uspořádanost, organizovanost a vykazuje účelové chování. Poznání těchto skutečností a jejich účelné využívání při konstrukci nových pohonových soustav či inovaci nebo rekonstrukci již existujících pohonů nám usnadňuje ***systémová metodologie***.

Dnešní požadavky na konstrukci pohonů i pohonových soustav se diametrálně odlišují od požadavků běžných v minulých letech. V prvé řadě se objevují požadavky na zahrnutí provozních vlivů již v etapě konstrukčního návrhu, masivní využívání nejrůznějších počítačových podpor umožnilo nebývalý rozvoj počítačového modelování, často bez odpovídajících teoretických znalostí. Začíná se prosazovat tzv. „komplexní“ modelování, modelování „ve variantách“ s důrazem na hodnocení jejich vlivů na okolí, pevnostní a dynamické analýzy i na velmi solidní úrovni se stávají běžnými rutinami a prioritní roli nabývá zajištění provozní spolehlivosti po předepsanou dobu technického života. V nejbližší době se dá očekávat

- že vedle respektování fyziologických, ekologických, energetických a ekonomických omezení dojde k sociálnímu hodnocení důsledků zavádění nových konstrukcí i technologií v oblasti techniky,
- růst humanizace inženýrského vzdělávání a respektování kulturních i etických principů při návrhu nových technických soustav – včetně pohonů,
- že se stále větší náležitostí bude vystupovat do popředí uvědomování si rizik, která platíme za inicializované technické změny (tzv. „prométheovský komplex soudobé technologie“).

Z těchto hledisek se jako nejprogresivnější přístupy jeví ***různé typy modelování*** nejen technických soustav samotných, ale i jejich chování, dynamických vlastností a vlivu na okolí.

Základním krokem při řešení dynamických úloh pomocí kteréhokoliv typu modelování je vytvoření množiny tzv. podstatných veličin, obsahující jak veličiny popisující strukturu, stavy a ovlivňování technických objektů, tak i veličiny charakterizující následky, tzn. jejich projevy a chování. Metody pro vytváření výpočtových modelů pohonových soustav, obecně interaktivních, mohou využívat :

- aplikací známých fyzikálních principů k popisu jevů, objevujících se v pohonových soustavách (např. II.Newtonova zákona nebo Kirchhoffových zákonů) nebo
- aplikací metod z oblasti mechatroniky, založených na algoritmech umělé inteligence (např. genetické algoritmy nebo umělé neuronové sítě a další),

přičemž rozvoj těchto metod výpočtového modelování vyvolává potřebu vytvoření soustavné metodiky kvalitativní analýzy výpočtových modelů, definovaných na bázi teorie systémů (přesné

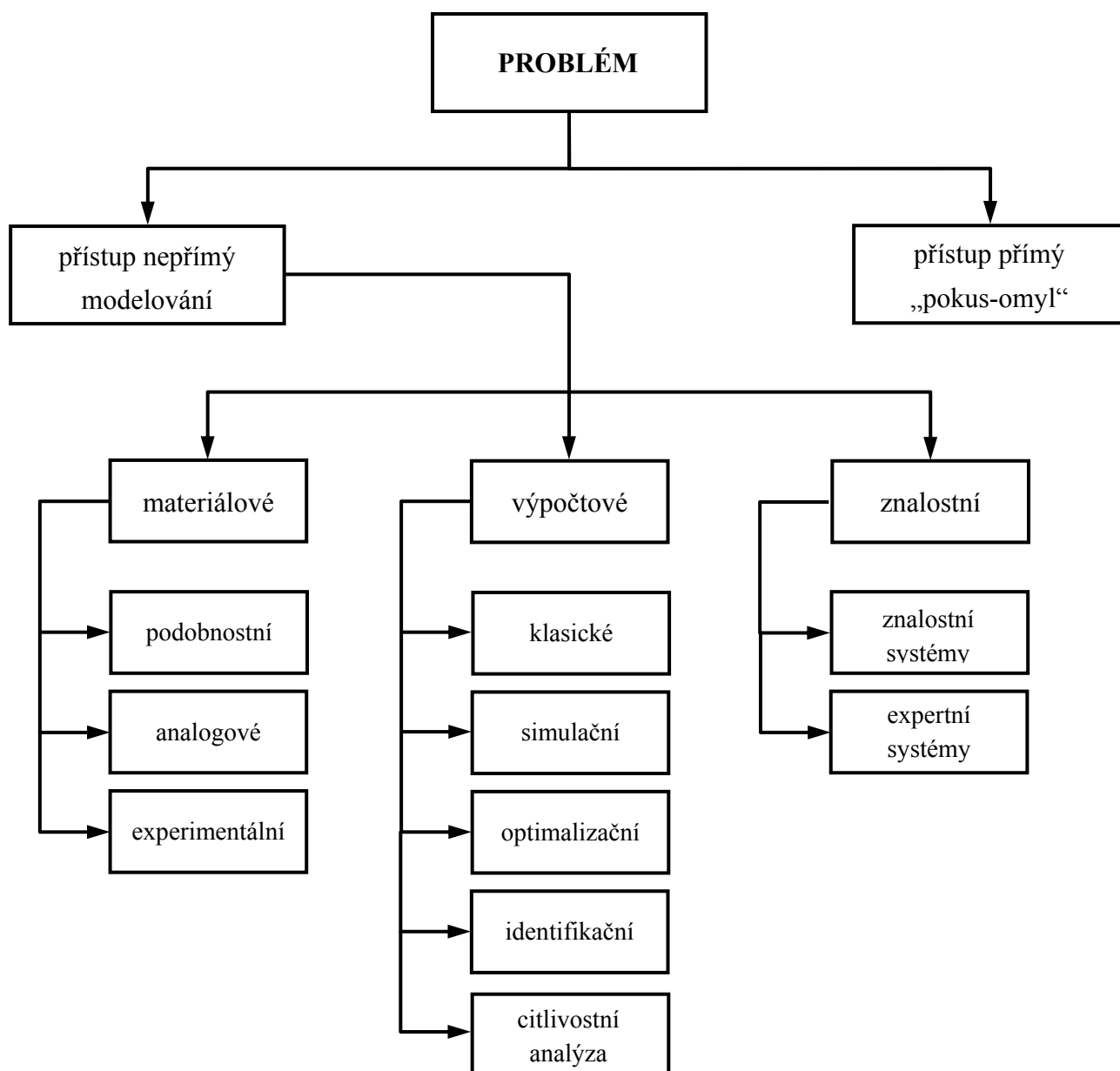
vymezení pojmu teorie systémů je dosud nejednotné a často i protichůdné. Jde o teorii, která má do značné míry formální, logicko-matematickou a metodologickou povahu. Jádrem teorie systémů je soubor abstraktních objektů, nazývaných obecnými systémy, které užíváme v systémové analýze resp. syntéze jako stavebnicové prvky, ze kterých sestavujeme modely reálných technických objektů tak, že obecné systémy vhodně modifikujeme, spojujeme a interpretujeme, přičemž tato interpretace musí vždy vycházet z kritického hodnocení použitého obecného systému (vzhledem k danému účelu) i vytvoření souborů metod pro jejich kvantitativní zpracování. Zastavme se nyní krátce u pojmů „systém“, „systémový přístup“, „systémové myšlení“ apod., patřících v současné době k velmi frekventovaným pojmům nejen v technické oblasti, které jsou však užívány až příliš často bez uvážení a pochopení jejich obsahového významu. Proto se jen krátce zmíníme o některých těchto pojmech s cílem zamezit případným nejasnostem a nedorozuměním :

- pojem **systém** je základním pojmem tzv. systémových teorií a přístupů a proto musíme mít vyjasněn jeho význam. Systém je definován jako abstraktní objekt vytvořený na reálném nebo abstraktním objektu z hlediska řešeného problému, přičemž jeho strukturu tvoří ty formalizované prvky, které jsou na určité rozlišovací úrovni řešení podstatné. Připomeňme, že prvek objektu je ta část jeho struktury, kterou jsme schopni na objektu na daných úrovních vymezit, považujeme jej z různých důvodů již dále nestrukturovatelný a principiálně jej lze od struktury oddělit. (Při používání pojmu systém, zejména v anglosaské literatuře, můžeme objevit dvě významové oblasti. Prvá oblast, kdy konstatujeme, že „objekt je systémem“, vyjadřuje skutečnost, že objekt má systémové vlastnosti bez ohledu na to, zda je reálný nebo abstraktní. Z tohoto hlediska se pak setkáváme s řadou různých typů systémů, např. tlumících, hnacích, řídicích ale i třeba chladících či potrubních. Proto doporučujeme pro takové případy použít pojmu **soustava**, jako reálný či abstraktní objekt se systémovými vlastnostmi, který je z určitých hledisek předmětem našeho zájmu. Pojem systém pak chápeme jako abstraktní, který nemůže existovat sám o sobě, ale je vždy jen ve vztahu k soustavě, přičemž složitost struktury systému je vždy menší než složitost soustavy a k dané soustavě lze obecně vytvořit více než jeden systém. Vytvoření systému tedy není jednoznačné a závisí na velmi mnoha okolnostech, především pak na účelu, pro který model vytváříme, na znalostech a zkušenostech řešitele a na možnostech jeho vybavení.),
- **systémový přístup** chápeme jako „náповědu“, na jaké podstatné skutečnosti by neměl řešitel při své činnosti zapomenout. Systémový přístup je obvykle chápán v užším pojetí než je jeho skutečný obsah. Nejčastěji se redukuje jen na strukturované vyšetřování objektů, na respektování vazeb mezi objekty a objekty a jejich okolím a na formulování cílového chování. Někdy je za systémový přístup považováno pouhé vytvoření soustavy relevantních veličin.

Kromě nezbytného chápání strukturovanosti objektů doporučujeme alespoň jejich účelové posuzování, tzn. že při výběru prvků struktur, jejich vlastností a projevů, při výběru vazeb a interakcí je zásadní posuzování jejich podstatnosti. Mezi další atributy systémového přístupu, které doporučujeme respektovat, patří zejména požadavek vyšetřovat objekty jako otevřené (neizolované) soustavy u nichž existují vazby a interakce s okolím, jako komplexní a interdisciplinární problémy a jako hierarchicky uspořádané struktury. Rovněž orientované vyšetřování, respektující zachování tzv. podstatných relací typu vstup-výstup, příčina-následek či nadřazené řešení-dílní řešení a dynamické

vyšetřování závislé na čase, stejně jako úrovnově vyvážené vyšetřování považujeme za nezbytné, chceme-li pracovat na současné úrovni vědy a techniky.

O metodách systémové analýzy a syntézy již bylo pojednáno v mnoha publikacích, stručný přehled možností je patrný z následujícího schématu.



V této monografii se omezíme jen na modelování výpočtové, často označované jako matematické. Jeho realizace vyžaduje :

- znalost matematické teorie popisující řešení problému,
- podmínky matematické řešitelnosti a znalost počátečních podmínek,
- výpočtový algoritmus, vycházející z matematické teorie,
- počítačové vybavení,

- vstupní údaje do počítače.

Výsledkem výpočtového modelování je odpovídající model, na kterém lze provádět numerické experimenty již ve stadiu návrhu nových technických soustav za podmínek blízkých skutečným provozním stavům.

Je samozřejmé, že modelování konkrétní technické soustavy musí respektovat výše uvedená obecná doporučení a současně musí brát zřetel na zvláštnosti, vyplývající z požadavků kladených na konkrétní soustavu a účel, pro který je vyvíjena. U pohonových soustav nutno vycházet z toho, že tyto slouží k pohonům pracovních strojů a že pohon jako samostatná strukturní subsoustava celé technické soustavy je propojen přinejmenším s řadou dalších subsoustav, které je nutné do odpovídajícího modelu zahrnout. To ale znamená, že našim cílem bude sestavení řady submodelů :

- a) elektrické (hydraulické či jiné) části motoru,
- b) mechanické části (motor, převody, spojky, ...),
- c) pracovního prostředí,
- d) technologických požadavků,

přičemž prvé dva submodely tvoří submodel pohonové soustavy, do které vstupují, jako vnější vlivy, požadavky řízení a poruch. Takto vytvořený model pak nazýváme komplexním modelem. To ovšem znamená, že musíme sestavit :

- pohybové rovnice jednotlivých subsoustav pohonu podle jejich fyzikální podstaty, tj. pro část mechanickou, elektrickou, řídicí, apod.,
- modely záběrových podmínek a kinematického buzení u převodových soustav,
- modelovat vliv vnějšího prostředí,
- modelovat algoritmizované požadavky technologických požadavků a řízení a integrovat je do submodelu řízení,
- formulovat a modelovat hnací, parazitní a poruchové účinky,
- modelovat subsoustavu informačních prvků.

Z formulace požadavků na vytváření počítačových modelů pohonových soustav je samozřejmé, že ne všechny modely budou muset obsahovat všechny tyto části (submodely), protože modely chápeme ve smyslu předchozích úvah jako účelové a částečně strukturované. Jinými slovy, podle účelu, pro který je model vytvářen, se může měnit jeho struktura a samozřejmě i jeho vlastnosti a použití. Snaha o určení vhodného stupně strukturální složitosti je závislá na tom, jaké požadavky má model splňovat, jaké provozní stavy má modelovat, jaké je rozložení přenášeného energetického výkonu a jaká má být jeho informační kapacita. Požadujeme tudíž současnou funkční totožnost a věcnou odlišnost zkoumaného technického objektu a jeho modelové soustavy. Jedná se o jistý druh analogie, splňující podmínky izomorfie. Pro pohonové soustavy a jejich matematické modely to konkrétně znamená, že musí existovat jednoznačná zobrazení mezi odpovídajícími definičními obory proměnných veličin, mezi počátečními stavy a vstupními a výstupními funkcemi. V praxi se ale někdy setkáváme s tím, že např. jednomu prvku z množiny Θ může být přiřazeno více prvků z množiny Φ , tzn. že se bezpodmínečně nevyžaduje bezpodmínečná jednoznačnost. Jedná se tedy o vztahy volnější, charakteristické pro homomorfismus. Homomorfní soustavy tedy nemusí být shodné, postačí, mají-li shodné rysy. Homomorfní soustavy se mohou shodovat, i když jednu z nich

(abstraktní) zjednodušíme tak, že její prvky a vazby, vstupy, stavy či výstupy nejsou dokonale rozlišeny, což je ve shodě s pojetím účelového a částečně strukturovaného dynamického systému a jeho modelu.

Shrneme-li základní skutečnosti, uvedené v předchozím textu, můžeme říci, že pohonové soustavy zastupují při simulačních experimentech modelové soustavy, chápané jako účelové a částečně strukturované dynamické systémy

- definované na reálných objektech na zvolené rozlišovací úrovni,
- chápané jako množiny vzájemně spjatých prvků a vazeb,
- interaktivně vázané s okolím.

Takto pojatý systém může být současně prvkem systému vyššího řádu, naopak prvek systému může být systémem nižšího řádu. Pohony z hlediska své struktury mohou obecně obsahovat :

- motorové subsoustavy,
- obecně vícestupňové řídicí subsoustavy,
- převodové mechanismy,
- obslužné mechanismy,
- technologické mechanismy.

Ne všechny modely musí nezbytně obsahovat všechny tyto subsoustavy. Naopak, pro řadu pohonů je typické, že řadu substruktur mají zdvojenou (tzv. zálohování funkcí), tudíž i jejich modely musí tuto skutečnost respektovat. Z hlediska účelu, pro který model použijeme, může se jejich struktura výrazně lišit. Proto se setkáváme s řadou různých modelových schémat, z nichž nejčastěji používanými jsou :

- pohony modelované jako „tuhé soustavy“ s jedním stupněm volnosti, zatížené hnacím a zatěžujícím momentem, eventuálně i tlumícím vnějším momentem,
- pohony modelované jako tuhý rotor + mechanismus s tuhými členy,
- diskretizovaný model s nehmotnými pružnými a tlumícími vazbami,
- model pohonu, diskretizovaný s využitím MKP,
- pohonové soustavy se spojitě rozloženými charakteristikami hmotností (spojitě rozloženými momenty setrvačnosti), tuhostí a případně i tlumení,
- modely interaktivních řízených pohonů, obsahujících submodely subsoustav s různou fyzikální podstatou (mechanickou, elektrickou, hydraulickou, apod.). Sem patří i modely mechatronických soustav, vykazujících jistý stupeň inteligentního chování.

Ve výše uvedeném výčtu možných modelů pohonových soustav se objevují pojmy „tuhé těleso“, „soustava tuhých těles“, „diskretizované modelové soustavy“ apod. K jejich správnému pochopení a určení je nutné respektovat další skutečnosti. Sám pojem „tuhé těleso“ a jeho role v dynamice je, mírně řečeno, rozporuplný. Podle definice tuhého tělesa musí být vzdálenost nejméně dvou jeho bodů konstantní. Na druhé straně, nelze přenést na těleso jakékoliv zatížení bez jeho deformace – to by znamenalo, že jeho modul pružnosti by musel být nekonečně velký. Těleso, resp. soustava těles, se ale může chovat buď jako tuhé těleso (soustava tuhých těles) nebo jako pružné těleso (soustava pružných těles). Tyto různé projevy přímo závisí na vzájemném vztahu množiny vlastních frekvencí

reálné soustavy a fourierovském spektru zatěžujících účinků. U modelové soustavy budou vlastní frekvence záviset přímo na zvoleném strukturálním rozložení, tj. na počtu stupňů volnosti modelové soustavy. Nevhodná volba modelové soustavy může vést k tomu, že dynamické chování nekoresponduje s chováním reálné soustavy. Kdy se tedy těleso (soustava těles) chová jako tuhé ? Jen tehdy když nejvyšší frekvence spektra zatížení je řádově menší než nejnižší (základní) vlastní frekvence modelové soustavy. Ve všech ostatních případech se modelová soustava bude chovat jako soustava pružných těles.

Předkládaná monografie „Úvod do výpočtového modelování pohonových soustav“, která by měla mít za cíl vyplnit citelnou mezeru v odborné literatuře pojednávající o výpočtovém modelování pohonových soustav, se snaží o všech výše uvedených problémech mluvit ve vzájemných souvislostech a přiblížit tak jejich pochopení studentům výpočtových specializací vysokých škol, doktorandům i inženýrům a usnadnit jim jejich využití při řešení aktuálních inženýrských problémů.

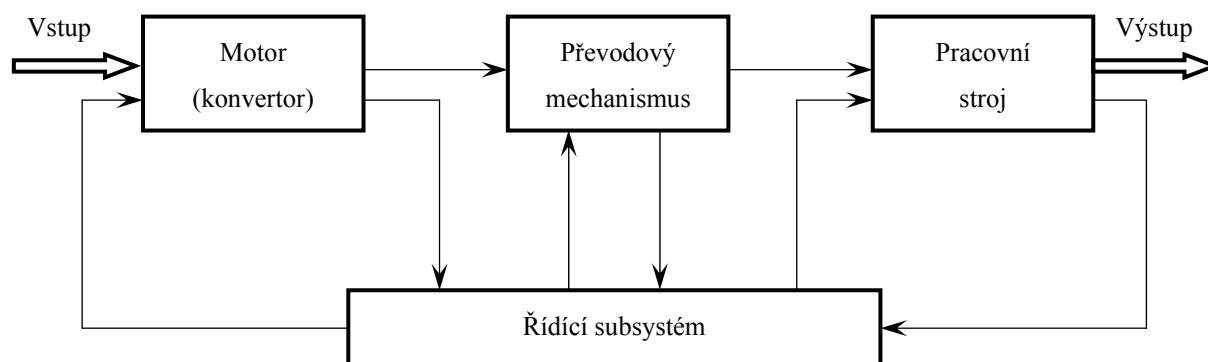
Brno, 2003

Kolektiv autorů

1. Úvod

Při řešení problematiky pohonových soustav, jejich chování a dynamických vlastností, musíme vycházet ze strukturálního rozboru pohonových soustav. Ty zpravidla obsahují základní účelovou složku (pracovní technologickou soustavu), dále soustavu pohonu, regulační a řídicí soustavu a dále informační a obslužné soustavy energetické. Pohonové soustavy v užším technickém smyslu obsahují tyto základní části – viz. obr.1 :

- soustavy hnacích motorů obecně řízených (např. elektrické sériové motory s otáčkovou a proudovou regulací),
- převodové mechanismy,
- zpětnovazební soustavy,
- soustavy pracovních strojů.



Obr.1. Schematické znázornění pohonové soustavy.

Nyní si uvedeme stručnou charakteristiku základních strukturních prvků pohonových soustav :

Motor , jsou prvky ve kterých se vstupní (primární) energie mění na mechanickou energii, přičemž tato mechanická energie se v nich neshromažďuje. Přeměna energie není dokonalá, děje se s účinností, která dosahuje (z hlediska konverze a typu konvertoru) různých hodnot. Podle typu vstupní (primární) energie, která se mění v energii mechanickou, rozdělujeme motory na motory elektrické, tepelné (spalovací, reaktivní) a tekutinové.

Pro všechny typy motorů je společné, že lze vybrat určitý vstupní parametr u (resp. vstupní parametry u_j , $j = 1, 2, \dots$) který řídí proměnu energie, nejčastěji rotační (charakterizovaný úhlovým natočením φ nebo úhlovou rychlostí $\omega = \dot{\varphi}$), méně často translační. Existuje tedy určitá funkční závislost typu

$$\omega \equiv \dot{\varphi} = f_{\varphi}(u) \quad \text{resp.} \quad v_x = \dot{x} = f_x(u)$$

nazývaná **ideální charakteristikou motoru** , která je základem pro definici dalších, pracovních charakteristik motorů.

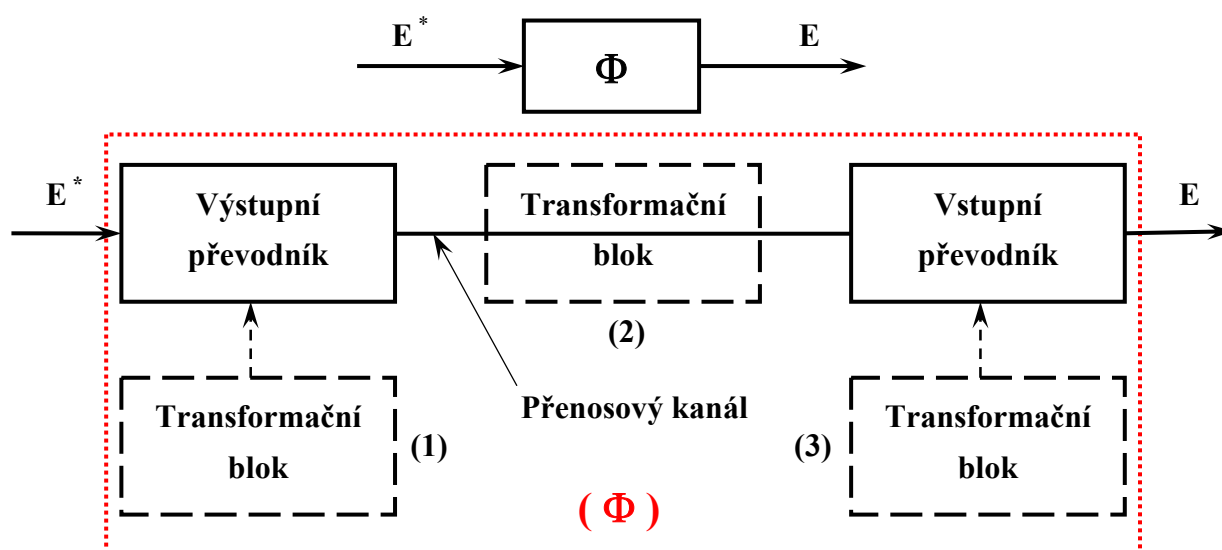
Z hlediska uspořádání se můžeme setkat s jednomotorovým a vícemotorovým uspořádáním. Vícemotorové uspořádání, obvyklá především u výkonných pohonových soustav, si vynutily požadavky praxe, především tyto skutečnosti :

- poměr výkonu a hmotností je u vícemotorových uspořádání příznivější ve srovnání s jednomotorovým uspořádáním a zvyšuje se s růstem požadovaných výkonů;
- vícemotorová uspořádání mají větší výkonovou rezervu (především u elektromotorů) a tím i vyšší provozní spolehlivost;
- vícemotorová uspořádání mají větší možnosti regulace rychlosti, resp. hnacího momentu, což je důležité zejména u složitých typů pohonů.

Vícemotorová uspořádání mají ovšem i některé nevýhody, vyplývající například z rozdílnosti charakteristik motorů (i když jsou stejného typu), které mohou vést k určitému sekundárnímu znovurozdělení toku výkonů a k možnostem intenzivních kmitavých procesů, k obtížím při stanovení stejných pracovních podmínek apod.

Převodové mechanismy zajišťují přenos energie a informace mezi dvěma nebo více definovanými místy v prostoru a řízení parametrů přenášené energie podle zvoleného zákona. Přenos energie v pohonových soustavách je kvantitativně charakterizován množstvím přenášené energie. Kvalitativně lze přenos energie posuzovat podle hlavní formy energie, přenášené v pohonových soustavách nebo v pohonových soustavách transformované na jiné formy.

Struktura převodového mechanismu obsahuje vstupní a výstupní převodník propojený přenosovým kanálem, ve kterém se pohybuje tzv. nositel energie. Pod pojmem nositele energie rozumíme soubor hmotných částí libovolného tvaru a velikosti, libovolných fyzikálních a případně i chemických vlastností, který je schopný přenášet v potenciálním poli definované množství energie. K ovládání parametrů přenášené energie slouží tzv. transformační blok; ten může být zařazen v přenosovém kanále nebo tvoří součást vstupního, resp. výstupního převodníku – viz. obr.2.



Obr.2. Struktura převodového mechanismu s možným uspořádáním transformačních bloků (1) ÷ (3).

Při realizaci přenosu energie vycházíme z jednoduché relace – viz. obr.2 :

$$E^* \geq E$$

přičemž případ $E^* = E$ znamená, že přenášená energie zůstává zachována beze zbytku v hlavní formě (jedná se idealizovaný případ). Relace $E^* > E$ naopak umožňuje kvalitativní hodnocení přenosu energie na základě rozdílu $\Delta E = E^* - E$ nebo poměru

$$\Phi_E = 1 - \frac{\Delta E}{E^*}$$

který se nazývá **součinitel přenosu energie**.

Informace je z hlediska fyzikální realizace smluvená hodnota parametrů přenášené energie, přičemž přenos informace v pohonových soustavách je vázán na přenos energie (jde o vzájemně podmíněné procesy, které probíhají současně). Přenos informace lze matematicky popsat pomocí dvou rovnic :

- pomocí transformační rovnice typu $I = (T) \cdot I^*$;
- pomocí rovnice přiřazení informace $I = f(I^*)$.

Zde jednotlivé symboly představují : I^* původní „hodnota“ informace, T čas. Transformační rovnice popisuje změnu hodnoty nebo druhu parametru energie, k němuž je na vstupu vázána informace. Rovnice přiřazení informace udává, jaká formulace na výstupu náleží zadané vstupní informaci.

Zpětnovazební soustavy dodávají řídicímu systému informace o skutečných hodnotách výstupních veličin řízené soustavy, které se porovnávají s jejich žádanými hodnotami. V případě rozdílu těchto veličin zasahuje řídicí systém prostřednictvím tzv. akční veličiny do řízené soustavy tak, aby odchylku odstranil.

Pracovní stroji obsahuje mechanismy, pomocí kterých se jednoduchý pohyb výstupního členu motoru přeměňuje na pohyb výkonných pracovních částí stroje, potřebných na vykonání pracovního procesu. Počet vstupních parametrů pracovního stroje se v převážné většině případů rovná počtu motorů. Výstupními parametry pracovního stroje jsou souřadnice pracovních členů mechanismů x_1, x_2, \dots, x_n . Mechanismy tedy vykonávají transformaci souřadnic definovaných funkcemi polohy, tedy

$$x_j = f_j(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Při pracovním procesu vznikají síly, které zatěžují jednotlivé členy pohonové soustavy. Proto je pro dynamický návrh mechanické soustavy nutné znát funkční závislost zatížení od výstupních parametrů a jejich časových derivací – **mechanickou charakteristiku zatížení**

$$Q_z = Q_z(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n).$$

2. Pohonové soustavy jako dynamický systém

Pohonové soustavy představují v současné době složité technické soustavy se složitou strukturou zpětných vazeb, které obsahují nejen mechanické, ale i elektrické, hydraulické a jiné části. Bezporuchový provoz takovýchto soustav představuje problém, o jehož úspěšném řešení se často rozhoduje již při konstrukčním návrhu a který je nutné mít na zřeteli i během provozu. Jako základní metodologický nástroj k řešení problému projektování pohonových soustav, jejich analýzy a syntézy, se ve stále větší míře využívá matematického modelování. V inženýrské praxi vyvolává rozvoj metod matematického modelování technických problémů potřebu vytvoření soustavné metodiky kvalitativní analýzy matematických modelů, definovaných na bázi teorie systémů (systém je abstraktní objekt, účelně vytvořený ve vědomí lidí ve vztahu k primárnímu objektu, je cílevědomě vytvořen pro řešení problémů na soustavě a je vytvořen z formalizovaných obrazů a vlastností) i vytvoření souborů metod pro jejich kvantitativní zpracování.

Přesné vymezení pojmu teorie systému je dosud nejednotné a často i protichůdné. Jde o teorii, která má do značné míry formální, logicko – matematickou a metodologickou povahu. Jádrem teorie systémů je soubor abstraktních objektů, nazývaných obecnými systémy, které užíváme v systémové analýze (resp. syntéze) jako stavebnicové prvky, ze kterých sestavujeme modely reálných technických objektů tak, že obecné systémy vhodně modifikujeme, spojujeme a interpretujeme. Tato interpretace musí vždy vycházet z kritického hodnocení použitého obecného systému vzhledem k danému účelu. Teorie systémů nám může podstatně ulehčit studium tak složitých technických soustav, jakými obecně pohonové soustavy jsou. Je třeba však zdůraznit, že jde pouze o nástroj, který může reálné objekty zobrazovat zjednodušeně. Každý systémový model, vytvořený na reálném objektu, může zobrazovat omezenou část projevů reálného objektu. Předpokládáme, že faktory, které nejsou v systémovém modelu zahrnuty, významně neovlivňují jeho základní vlastnosti. Splnění tohoto předpokladu musíme vždy prověřovat.

2.1. Dynamické systémy a jejich struktura. Stavové rovnice

Dynamické systémy budeme chápat jako prostředek vytvořený pro analýzu systémových jevů, jako abstraktní a exaktní metodický nástroj zkoumání relací z hlediska okamžitých časových změn. Systémové jevy – které můžeme považovat za dynamické systémy, u kterých je potlačena materiální a zvýrazněna procesní složka – považujeme za časově závislé obecně nestacionární procesy charakterizující povahu a vlastnosti zkoumaných objektů.

Z hlediska struktury dynamické systémy obsahují :

- množinu podstatných veličin,
- množinu relací mezi podstatnými veličinami a okolním prostředím

což lze formálně zapsat takto :

$$\varphi \equiv \{T, P, B, Z, R_a, R_o, R_k, R_z\} \quad (2.1)$$

kde jednotlivé symboly představují :

- **T** je časová množina (vzorkovací),
- **P** je množina parametrů systémů,
- **B** je množina nezávislých veličin,
- **Z** je množina závislých veličin,
- **R_a** je množina relací přímých,
- **R_o** je množina relací okamžitých změn,
- **R_k** je množina relací kumulativních změn,
- **R_z** je množina relací zpoždění.

V interpretaci vlastností technického objektu při vytváření dynamického systému se dopouštíme určitého zjednodušení. Především ale musíme oddělit zkoumané jevy od ostatních, oddělit systém od jeho tzv. okolí. Jevy kolem nás, všeobecně, jsou na sobě více či méně závislé, obecně neomezeně zřetězené. Pro sestavení použitelného matematického modelu musíme rozhodnout, co z tohoto nekonečného řetězce separovat jako zkoumaný problém. Pouze na takovém uměle separovaném úseku skutečnosti lze budovat systém, vše ostatní zahrnujeme do okolí systému.

2.1.1. Množiny podstatných veličin

Časová množina $T = \{t\}$ je základním formálním prvkem každého dynamického systému. Je uspořádanou podmnožinou reálných čísel **R** a může být definována jako :

- **diskrétní časová množina** , tj. jako konečná (nebo nekonečná) posloupnost časových dat

$$T = \{ \dots, t_0, t_1, t_2, \dots, t_k, \dots \}, \quad (2.2)$$

přičemž délka časového intervalu (kroku) $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ nemusí být nutně ekvidistantní,

- **spojitá časová množina** u systémů spojitých v čase, která je definována relací

$$T = \{ t : t_0 \leq t \leq t_k \}, \quad (2.3)$$

není-li časový interval $t \in \langle t_0, t_k \rangle$ zadán předpokládáme, že T je množina všech reálných čísel

Množina stavů je definovaná abstraktní množina, která může být definována jako kartézský součin $X = X_1 \otimes X_2 \otimes \dots \otimes X_n$ podmnožin X_1, X_2, \dots, X_n . Prvky x množiny **X** nazýváme stavy dynamického systému. Pokud není množina stavů definována jinak, předpokládáme, že množina stavů je n – dimenzionální euklidovský prostor R^n ,

$$R^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in R^1, \text{ pro } i = 1, 2, \dots, n \} . \quad (2.4)$$

Vektor

$$\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n], \quad (2.5)$$

nazýváme stavovým vektorem.

Vstupní veličiny $u_j(t)$ lze sestavit do vstupního vektoru

$$\mathbf{u}^T \equiv \mathbf{u}^T(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_l(t)]; \quad \mathbf{u}(t) \in U \quad \text{pro } t \in T, \quad (2.6)$$

kde $U = \{\mathbf{u}\}$ je tzv. vstupní prostor.

Výstupní veličiny $y_j(t)$ lze sestavit do výstupního vektoru

$$\mathbf{y}^T = \mathbf{y}^T(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)]; \quad \mathbf{y}(t) \in Y \quad \text{pro } t \in T, \quad (2.7)$$

kde $Y = \{\mathbf{y}\}$ je tzv. výstupní prostor.

Vstupní a výstupní veličiny tedy definují působení okolí na systém a naopak projevy systému vůči okolí. V technických aplikacích lze výstupy charakterizovat také jako výsledky sledované činnosti objektu.

2.1.2. Relace v dynamických systémech

Relací v dynamických systémech rozumíme jakýkoliv předpis $R(q_1, q_2, \dots, q_n)$, který z množiny přípustných hodnot proměnných příznaků q_1, q_2, \dots, q_n definuje podmnožinu kombinací vyhovujících danému předpisu. Zvláštní skupinou relací jsou ty, které určují závislost mezi současnými hodnotami příznaků; mezi příznaky relace není obsažen čas a relace tohoto typu nazýváme **statické**. Všechny ostatní relace, u kterých mezi příznaky obecně patří i čas, jsou relace **dynamické**. Dynamický systém musí obsahovat takovou množinu relací, z nichž alespoň jedna je dynamická.

Jako důsledek přenosu určité události, změny, resp. informace na určitou vzdálenost konečnou rychlostí, vzniká zpoždění. V teorii systémů se určité příznaky uplatňují jako časově posunuté a mluvíme o **relaci zpoždění**. Opakem je **relace integrace**, která představuje akumulaci určitých příznaků ve fyzice nebo fiktivně vymezených částech prostoru v čase. Přírůstek hodnoty příznaku za relativně krátký časový interval $\langle t, t + \Delta t \rangle$ je úměrný délce intervalu Δt . Tím je každá integrace určitou přirozenou pamětí posledního stavu systému, na níž navazuje a vytváří charakteristickou tendenci ke spojitosti změn v čase, vlastní všem reálným dynamickým jevům.

Orientace relací souvisí s vystižením zákonitosti změn příznaků dynamického systému v čase. Poněvadž při vzájemné závislosti událostí budoucí vždy vyplývá z minulého, vyjadřuje základní axiom orientace relací dynamického systému schema „minulý“ \rightarrow „budoucí“.

2.1.3. Principy a teorie systémů

Základním principem v teorii systémů je **princip kauzality** (příčinnosti), který vyjadřuje zásadu důsledného rozlišování mezi příčinami a důsledky. Některé příznaky jsou v relacích systému trvale v úloze vstupních veličin, jiné představují důsledky příčinného vztahu, tj. příznaky výstupu – výstupní veličiny. Relace s těmito vlastnostmi reprezentující transformaci vstupních veličin na veličiny výstupní, označujeme jako **orientované relace**. Při rozhodování o vstupech a výstupech může

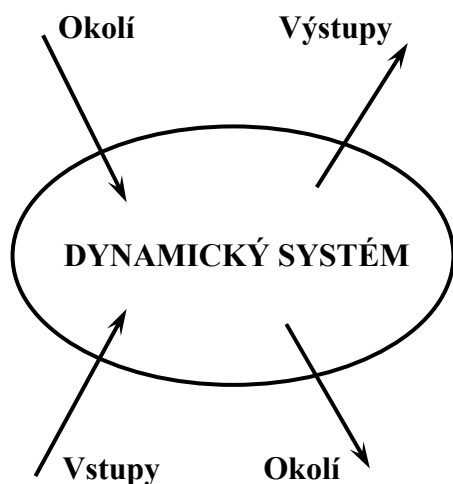
v některých případech posloužit jako kritérium i podmínka uskutečnitelnosti jevů v čase – následek nemůže předcházet příčinu.

Významnou složkou struktury dynamických systémů jsou **zpětné vazby**. Lze je charakterizovat jako situaci ve vnitřním uspořádání systému, kdy určité veličiny ovlivňují, i když nepřímo prostřednictvím jiných veličin, samy sebe. Zpětné vazby v zásadě rozdělujeme na :

- kladné zpětné vazby, kdy účinek má stejný smysl vzhledem k situaci, která by nastala bez působení zpětné vazby,
- záporné zpětné vazby, kdy účinek má opačný smysl vzhledem k situaci, která by nastala bez působení zpětné vazby.

Princip separability systému. Oddělení systému od okolí nemůže být libovolné. Systém je separabilní, tj. jsme oprávněni zabývat se jím jako samostatným problémem tehdy, jestliže jeho výstupy neovlivňují ty příznaky okolí, jež jsou jeho vstupy – viz. obr.3. Prakticky zmírňujeme podmínku separability na požadavek, aby výstupy systému působily na okolí tak, aby nemohly významně ovlivnit příznaky určující jeho vstupy. Jen tak má definování systému reálného objektu smysl. Dynamické systémy můžeme také dělit na fyzikálně realizovatelné a abstraktní. Fyzikálně realizovatelné dynamické systémy charakterizují následující předpoklady :

- stav a výstup v libovolném časovém okamžiku t_p mohou být funkcemi jen takových vstupních veličin, které působily před tímto okamžikem,
- vztahy mezi jednotlivými prvky dynamického systému jsou určovány relacemi mezi fyzikálními veličinami, které lze měřit (výchyly, rychlosti, teploty, napětí, proud, atd.).



Obr.3. Princip separability systému.

Abstraktní systémy mohou být reprezentovány např. matematickými modely. Jsou opět vytvořeny na dané rozlišovací úrovni na daném objektu s cílem studovat dynamické vztahy mezi veličinami a relacemi, které charakterizují dění ve skutečných objektech.

Výstup z dynamického systému obvykle závisí nejen na současném vstupu, ale i na minulé historii. Údaje o minulých stavech systému, potřebné pro určení současných i budoucích vstupů, obsahuje stavový vektor \mathbf{x} . To znamená, že stav systému můžeme také chápat jako určitou paměť minulých příčin, tj. vstupů a počátečního stavu.

Na závěr si ještě vymezíme pojem **blokové schéma** dynamického systému. Jeho význam spočívá

ze systémového hlediska v tom, že graficky interpretuje orientované relace jako transformace vstupů na výstupu v blocích. Lze je opět chápat jako systém grafických symbolů (vyjadřujících jednoznačně a názorně obsah veličin) a relací mezi nimi.

2.1.4. Stavové rovnice dynamických systémů

Uvažujme jednoduchý dynamický systém, jehož blokové schéma je nakresleno na obr.4. Měníme-li hodnoty prvků vstupního vektoru $\mathbf{u}(t)$ a pozorujeme-li odezvu systému, tj. prvky výstupního vektoru $\mathbf{y}(t)$, zkoumáme vlastně množinu relací

$$\begin{aligned} R_1(u_1, u_2, \dots, u_l, y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0 \\ R_2(u_1, u_2, \dots, u_l, y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0 \\ &\vdots \\ R_n(u_1, u_2, \dots, u_l, y_1, y_2, \dots, y_m) &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

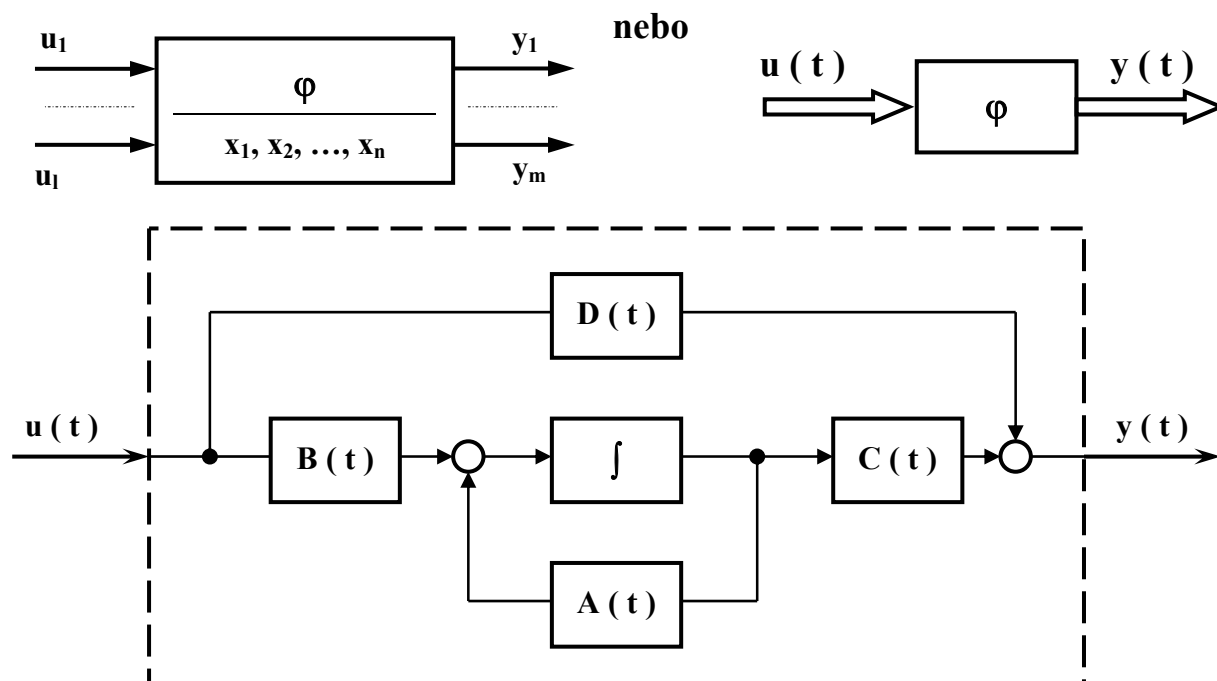
Abstraktním orientovaným systémem je právě množina relací mezi jeho vstupy a výstupy, kterou můžeme vyjádřit ve tvaru množiny uspořádaných dvojic vektorů $\mathbf{u}(t)$ a $\mathbf{y}(t)$:

$$\varphi: R\{\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)\} = 0, \quad t \in T, \quad \mathbf{u} \in U, \quad \mathbf{y} \in Y. \quad (2.9)$$

Avšak podle této definice může daným vstupům odpovídat více výstupů, které odpovídají různým počátečním podmínkám – různým počátečním stavům systému. Tuto mnohoznačnost vztahů mezi vstupy a výstupy vyloučíme zavedením vektoru počátečního stavu systému v čase t_0 :

$$\mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{x}(t = t_0) = [x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}]^T, \quad (2.10)$$

který přiřadíme k zápisu (2.9). Pro technickou praxi je ale bližší vyjádření formálního vztahu (2.9) matematickou formulací.



Obr.4. Blokové schéma dynamického systému.

Stav dynamického systému v čase $t > t_0$ jednoznačně popisuje maticová diferenciální rovnice, obecně nelineární, která má následující tvar :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t], \quad (2.11)$$

a kterou nazýváme *stavovou rovnicí dynamického systému*.

Výstupní relaci dynamického systému popisuje algebraická maticová rovnice, opět obecně nelineární, která má následující tvar :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]. \quad (2.12)$$

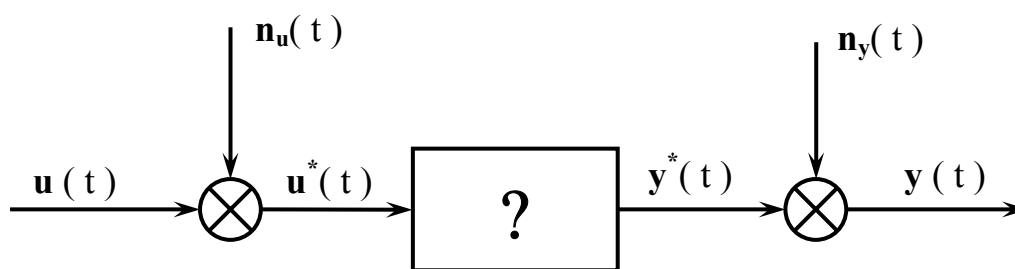
Rovnice (2.11) a (2.12) doplníme definicí počátečního stavu systému (2.9) případně soustavou podmínek realizující časové zpoždění.

2.2. Identifikace dynamických systémů

Při sestavování matematického modelu stojíme před úkolem vystihnout matematickými prostředky určité projevy zvoleného technického objektu neboli identifikovat příslušnou mechanickou soustavu. *Identifikace dynamického systému* je proces, jehož výsledkem je matematické vyjádření určitých, pro daný účel podstatných vlastností a projevů technického objektu (buď existujícího, nebo teprve projektovaného) v použitelné formě. Klademe zde důraz na použitelnost konečného výsledku identifikace – musíme si totiž uvědomit, že cílem není jen obecná teorie problému, ale realizovatelný výpočet s věrohodným výsledkem. Například : za konečný výsledek identifikace nelze považovat popis určitého jevu nekonečnou řadou, pokud není doplněn údajem, že pro dosažení určité přesnosti je možné zbytek řady od určitého členu zanedbat.

Rozlišujeme dva zásadně odlišné principy hledání vhodného matematického modelu, deduktivní a induktivní postup. **Deduktivní identifikace** – vyvozujeme speciální závěry o konkrétním případě na základě obecně platných zákonů příslušné vědní disciplíny (např. mechaniky, sdílení tepla apod.). Tento postup lze použít pouze v těch případech, kde podstata vyšetřovaných jevů je dobře známa a kde je propracována a ověřena jejich obecná teorie. **Induktivní identifikace** – používáme všude tam, kde nejsou splněny podmínky pro použití deduktivního postupu. Induktivní identifikace spočívá v tom, že sledujeme určité vnější projevy objektu a k získaným experimentálním údajům vyhledáváme jim vyhovující relace mezi vstupem a výstupem. Vzhledem k tomu, že potřebu takového postupu vyvolává neznalost podstaty jevů probíhajících v technickém objektu, označujeme induktivní identifikaci obvykle jako metodu „černé skříňky“ black box.

Oba postupy identifikace nelze považovat za rovnocenné. Zatímco deduktivní identifikací získáváme v zásadě jednoznačné řešení problému, výsledek induktivní identifikace je vždy ve své podstatě nejednoznačný. K určitým zjištěným údajům o vstupech a odpovídajících výstupech černé skříňky existuje nekonečně mnoho matematických modelů, z nichž žádný však zpravidla nevyhovuje zcela přesně (chyby měření, nedodržení ideálních podmínek experimentů apod.). Induktivním postupem získaný matematický model je tak jen jednou z mnoha možných aproximací situace objektu v níž probíhaly experimenty. Sledujme nyní podmínky, za nichž jsme schopni provádět experiment při induktivní identifikaci dynamického systému – viz. obr.5.



Obr.5. Podmínky experimentu při indukivní identifikaci.

Bylo řečeno, že východiskem při indukivní identifikaci dynamických systémů je měření vzájemně si odpovídajících vstupů, které je nutno na reálném technickém objektu vybrat (zvolit) s větší či menší přesností. Vždy je nutné také počítat s tím, že na vybraný výstup působí více vstupů (s větší či menší intenzitou ovlivnění) a že jak na vstup mohou působit parazitní šумы, tak také na výstup mohou působit parazitní šумы – viz. obr.5. Základní požadavek indukivní identifikace dynamického systému, tj. izolovat vždy vliv jediného vstupu na vybraný výstup jsme schopni splnit jen přibližně. Proto dáváme všude tam, kde je to jen možné, přednost deduktivní identifikaci před identifikací indukivní.

Identifikace v praktických aplikacích neprobíhá podle jednoho z výše uvedených principů, ale je jejich určitou kombinací, takže mluvíme o různých stupních indukivnosti identifikace. Pro různé aplikační oblasti je příznačný určitý podíl indukivního a deduktivního přínosu v identifikaci podle úrovně zpracování obecné teorie problému (např. modely fyziologických procesů jsou charakteristické podstatně širším uplatněním indukce a experimentu než např. modely letících objektů, kde znalost pohybových zákonů dovoluje téměř úplnou deduktivní identifikaci). Potřeba získat použitelný výsledek identifikace si prakticky vždy vynucuje zjednodušení v matematickém vyjádření vlastností objektu. Při deduktivní identifikaci zjednodušujeme matematický model především tím, že vlastnosti objektu idealizujeme. **Idealizací** rozumíme každý obrat v pojetí technického objektu, který vede k formálnímu zjednodušení jeho matematického modelu. Idealizace umožnila dnešní široké uplatnění matematiky v přírodních vědách a je tak nedílnou součástí exaktního myšlení vůbec. Řada pojmů zavedených idealizací reálných jevů se vžila tak, že se někdy zapomíná, nakolik to jsou fikce.

2.3. Simulace dynamických systémů. Počítačový model

Primárním zdrojem poznání v přírodních a technických vědách je experiment se vzorkem zkoumaného jevu. Zobecňováním širokých experimentálních zkušeností bylo možné v některých vědních oborech vypracovat více či méně jednotnou teorii studovaných procesů, která umožňuje objevovat další poznatky cestou dedukce a analýzy matematickými metodami, tj. pomocí matematických modelů. Až do nedávné doby byla praktická použitelnost matematického modelu omezena existencí analytického řešení. Teprve rozvoj výpočetní techniky znamenal podstatné rozšíření mezí

řešitelnosti matematických modelů. Umožnil také postupně automatizovat výpočet řešení rovnic matematického modelu natolik, že člověku zůstává pouze úloha :

- volit a vkládat vhodné vstupy matematického modelu,
- prostřednictvím výstupního zařízení počítače (souřadnicový zapisovač, displej, tiskárna apod.) sledovat a hodnotit výstupní výsledky.

Za uvedených podmínek lze tedy s automatizovaným výpočtem zacházet z hlediska vytčeného cíle v podstatě jako s reálným vzorkem technického objektu. V různých variantách výpočtu lze sledovat a měřit chování technického objektu za různých podmínek, pod vlivem různých vstupů. Technickou realizaci matematického modelu technického objektu na počítači, s níž lze uvedeným způsobem pracovat, označujeme jako **počítačový model**.

Práce s automatizovaným řešením projevů matematického modelu na počítači otevřela prostor pro specifickou syntézu experimentálně empirické a teoreticko – analytické metody vědeckého poznání. Sestavení matematického modelu a jeho počítačová realizace vycházejí z matematické teorie problému, ale práce s počítačovým modelem nese charakteristické znaky klasického experimentování. Představuje kvalitativně nový způsob řešení úloh, u nichž není možné experimentovat s reálným vzorkem, ani najít dedukcí analytické řešení. Hlavním znakem metody je napodobení reálných jevů počítačovým modelem, a proto bylo pro ni přijato označení **simulace**.

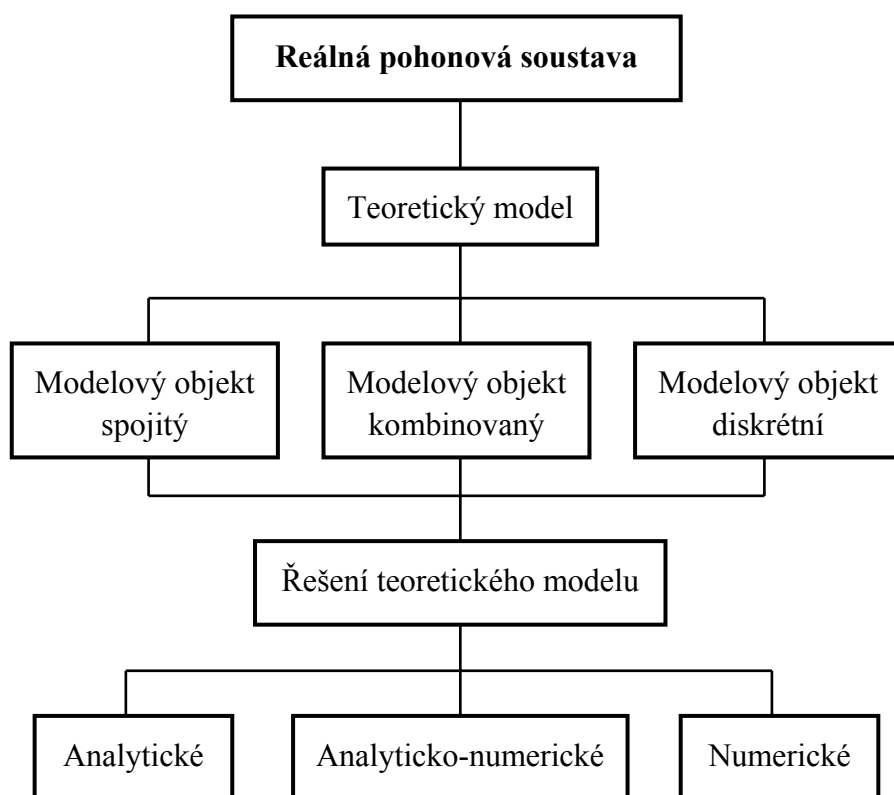
Využití počítačového modelu však nelze redukovat jen na automatizované řešení rovnic matematického popisu problému. Pod pojmem simulace zahrnujeme všechny fáze procesu poznání, jehož výsledkem je ekvivalence počítačového modelu a vyšetřovaného technického objektu ve vlastnostech a projevech zvolených za podstatné, s přesností postačující danému účelu. Hlavní fáze procesu simulace jsou :

- vymezení systému na zkoumaném technickém objektu,
- sestavení počítačového modelu,
- ověření shody projevů počítačového modelu a technického objektu,
- vlastní experimenty s počítačovým modelem,
- aplikace výsledků simulačních experimentů na zkoumaný technický objekt.

Dosažení uvedených atributů procesu simulace je zřejmě podmíněno potřebnou úrovní automatického řízení výpočtů a zprostředkování vstupů a výstupů mezi počítačem a řešitelem. Skutečné experimentování s počítačovým modelem, jako náhradou za reálný vzorek technického objektu, může nastat jen tehdy, jestliže vlastní výpočet se stane spolehlivou, dostatečně rychlou a snadno ovladatelnou automatizovanou procedurou. Podstatnou součástí výbavy počítače jsou přitom grafická výstupní zařízení (obrazkový displej, souřadnicový zapisovač, tiskárna apod.). Čím lépe jsou uvedené podmínky splněny, tím snadněji a spolehlivěji může řešitel pracovat s počítačovým modelem jako s náhradním vzorkem technického objektu a získat tak hodnotnější informace.

3. Modelování pohonových soustav

Dynamické vlastnosti reálné pohonové soustavy (technického objektu) je možné vyšetřovat, jak již bylo uvedeno dříve, pomocí jemu přiřazených modelových objektů. Reálná pohonová soustava je pohonovou soustavou se spojitě rozloženými hmotnostními a tuhostními parametry. Této pohonové soustavě mohou být přiřazeny modelové objekty s parametry rovněž spojitými, nebo je možné provést jejich náhradu parametry diskrétními. Pak hovoříme o spojitých modelových objektech nebo diskrétních modelových objektech. Modelové objekty z hlediska řešení daného dynamického problému a požadované přesnosti výsledků, musí mít vybrané dynamické vlastnosti shodné nebo podobné, jako má reálná pohonová soustava (vlastní frekvence, odezva na standartní buzení apod.). Původní spojitě pohonové soustavě přiřadíme modelovou pohonovou soustavu podle dostupného a použitelného teoretického modelu, představujícího teorie popisujících daný dynamický problém – viz. obr.6. Je třeba zdůraznit, že vytváření modelových objektů je podřízeno dostupným teoretickým modelům a nikoliv naopak.



Obr.6. Přiřazení modelového objektu reálné pohonové soustavě.

Zvláštní pozornost je třeba věnovat vytváření náhradních ekvivalentních diskrétních modelových objektů, neboť jejich široké uplatnění v současnosti je dáno značnými možnostmi dostupné výpočetní techniky.

Pro přípravu parametrů diskrétního modelu použijeme následující podmínky mezi reálnou pohonovou soustavou a jeho modelem :

- zákon zachování kinetické energie
- rovnost práce vnějších a vnitřních silových účinků a u konzervativních soustav rovnost potenciální energie.

Diskretizací rozumíme postup modelování, při kterém se spojují, soustřeďují a koncentrují spojitě elementy modelové mechanické soustavy. Používají se dva druhy diskretizace :

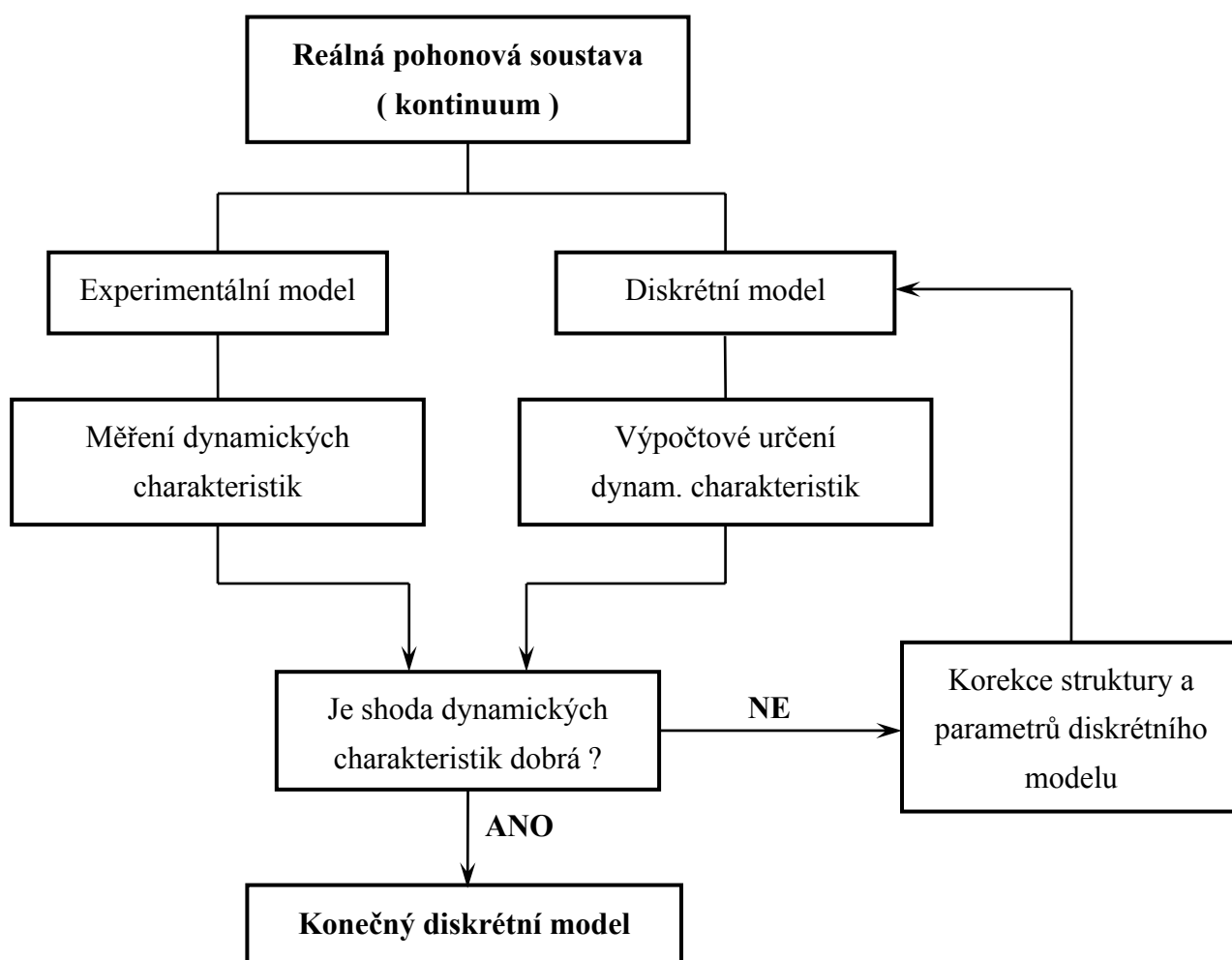
- **názorná diskretizace**, při níž se modelovaný systém rozloží na jednotlivé hmotné části (tuhá hmotná tělesa nebo hmotné body), přičemž vzájemné spojení je reprezentováno nehmotnými pružnými a tlumícími elementy

- **formální diskretizace**, při níž se sestaví rovnice problému (diferenciální nebo integrální) spojitého systému a pak při řešení pohybu se diferenciály nahrazují diferencemi a integrály se přiřadí sumy za účelem numerického řešení dané problémové rovnice. Jedním z těchto přístupů je metoda konečných prvků.

Použití diskrétních modelů má řadu výhod :

- je možné schematizovat výstavbu modelového objektu z jednotlivých stavebních prvků a polí,
- výpočet všech souřadnic pohybu je jednodušší,
- relativně velké množství potřebných vstupních údajů se může racionálně zpracovat pomocí číslíkové výpočetní techniky,
- na rozdíl od spojitých modelů je programování málo vázané na strukturu, tzn. že vliv strukturní výstavby na řešení problému se může lehce zvládnout.

Při diskretizaci vzniká často problém dobré shody a přesnosti, kterých se dosahuje při náhradě reálné pohonové soustavy jejím diskrétním modelem. Tato kritéria lze posuzovat v situacích, kdy lze stanovit vlastnosti původní soustavy, tedy reálné pohonové soustavy. Pak lze strukturu a parametry diskrétní modelové soustavy upřesňovat vhodným experimentem – viz. obr.7.



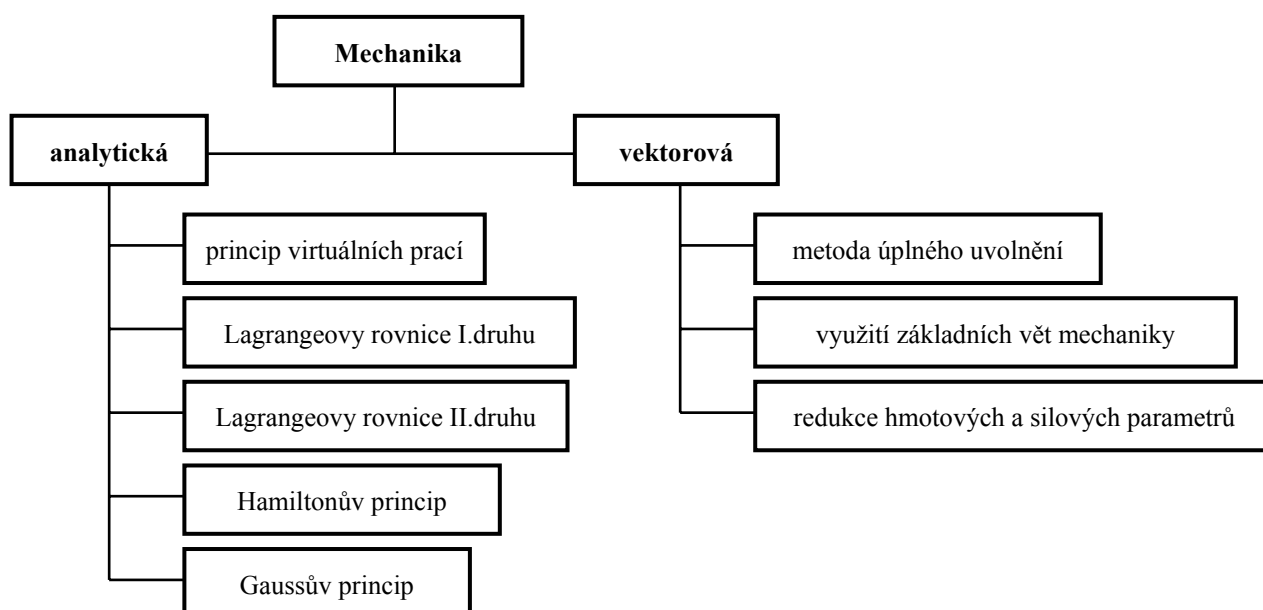
Obr.7. Postup při vytváření diskrétního modelu reálné pohonové soustavy.

U diskrétních modelových objektů při dynamické analýze počet nezávislých souřadnic (počet stupňů volnosti) souvisí s nejvyšší vlastní frekvencí reálné pohonové soustavy, které nás v dané úloze zajímá. Je-li to např. k – tá vlastní frekvence reálné pohonové soustavy, pak počet nezávislých souřadnic diskrétního modelu má splňovat podmínku $N \geq 2k$, nebo $N \geq k + 8$, přičemž se použije menší hodnota N z těchto dvou vztahů. Podmínkou je ovšem shodná struktura reálné pohonové soustavy i modelového objektu.

Přesnost při diskretizaci je dána způsobem diskretizace (hmotná tělesa, hmotné body, počet diskrétních parametrů), správným definováním okrajových podmínek a také na druhu pohybu (rotační, translační, příčné kmity, ohybové kmity, torzní kmity, atd.), které reálná pohonová soustava vykonává. Platí všeobecná zásada, že při zvětšení počtu diskrétních parametrů se rozdíl mezi různými způsoby diskretizace zmenšuje a u nižších vlastních frekvencí se získává lepší shoda. Při tom je nutno vycházet z požadavku minimálního počtu stupňů volnosti modelového objektu, který nám poskytne z hlediska řešeného problému dostatek potřebných informací o vlastnostech vyšetřované reálné mechanické soustavy. Zavedením většího počtu diskrétních parametrů, než je u minimálního modelu, nepřinese již žádné další nové informace, kromě zpřesnění sledovaných dynamických charakteristik modelového objektu. Na druhé straně zvětšení počtu diskrétních parametrů činí úlohu složitější a vyžaduje vyšší nároky na potřebnou výpočetní techniku.

3.1. Pohybové rovnice pohonových soustav

Při analýze dynamických vlastností modelových pohonových soustav (modelových objektů), jakožto náhrady reálných pohonových soustav, je důležitým krokem sestavení potřebných pohybových rovnic. Pohybové rovnice vyjadřují vazby mezi parametry hmotnostními, silovými účinky a kinematickými veličinami pohybu dané modelové pohonové soustavy (modelového objektu). Při sestavování pohybových rovnic modelových pohonových soustav lze použít různých metod jak z vektorové mechaniky, tak také z analytické mechaniky – viz. následující schéma.



My se zde podrobněji zmíníme pouze o třech, v technické praxi nejpoužívanějších, metodách a to o metodě redukce hmotových a silových parametrů, o Lagrangeových rovnicích druhého druhu a o Hamiltonově principu.

3.1.1. Metoda redukce hmotových a silových parametrů

Metoda redukce je výhodná pro sestavení pohybových rovnic pohonových soustav s jedním stupněm volnosti. Pohyb takovéto pohonové soustavy lze vyjádřit pohybem myšleného členu, který se pohybuje shodně se zvoleným základním členem, na který redukuje všechny hmoty i všechny pracovní silové účinky. Za základní člen se obvykle volí hnací nebo hnaný člen, který koná rotační pohyb nebo posuvný pohyb. Vycházíme přitom z věty o změně kinetické energie soustavy těles ve tvaru

$$\frac{d E_k}{d t} = P, \quad (3.1)$$

kde P je výkon pracovních silových účinků. Jak je známo, lze rychlosti všech těles soustavy s jedním stupněm volnosti vyjádřit ve tvaru $\dot{q}_i(q, \dot{q})$, kde q je polohová souřadnice základního členu. Kinetická energie soustavy těles může být vyjádřena při redukci na rotující člen ve tvaru

$$E_k(q, \dot{q}) = \frac{I}{2} I_{red}(q) \cdot \dot{q}^2, \quad (3.2a)$$

nebo při redukci na posouvající člen ve tvaru

$$E_k(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_{red}(q) \cdot \dot{q}^2, \quad (3.2b)$$

kde $I_{red}(q)$ je redukovaný moment setrvačnosti soustavy při redukci na rotující základní člen nebo $m_{red}(q)$ je redukovaná hmotnost soustavy při redukci na posouvající člen.

Výkon všech pracovních silových účinků lze při redukci na rotující člen vyjádřit ve tvaru

$$P(t, q, \dot{q}) = M_{red}(t, q, \dot{q}) \cdot \dot{q}, \quad (3.3a)$$

nebo při redukci na posouvající člen ve tvaru

$$P(t, q, \dot{q}) = F_{red}(t, q, \dot{q}) \cdot \dot{q}, \quad (3.3b)$$

kde $M_{red}(t, q, \dot{q})$ je redukovaný moment při redukci na rotující člen nebo $F_{red}(t, q, \dot{q})$ je redukovaná síla při redukci na posouvající člen.

Redukované veličiny určíme z rovnosti kinetických energií skutečné a redukované soustavy

$$[E_k]_{skut} = [E_k]_{reduk}, \quad (3.4a)$$

a z rovnosti prací, nebo výkonností skutečné a redukované soustavy

$$\begin{aligned} [A]_{skut} &= [A]_{reduk} \\ [P]_{skut} &= [P]_{reduk} \end{aligned} \quad (3.4b)$$

přičemž v případech kdy všechny působící síly jsou konzervativní, lze místo vztahů (3.3b) vycházet z rovnosti potenciálních energií skutečné a redukované soustavy

$$\left[E_p \right]_{skut} = \left[E_p \right]_{reduk} , \quad (3.4c)$$

Derivací kinetické energie ve tvaru (3.2a) resp. (3.2b), dostaneme

$$\frac{d E_k}{d t} = I_{red}(q) \ddot{q} \dot{q} + \frac{1}{2} \frac{d I_{red}(q)}{d q} \dot{q}^3 , \quad (3.5a)$$

resp.

$$\frac{d E_k}{d t} = m_{red}(q) \ddot{q} \dot{q} + \frac{1}{2} \frac{d m_{red}(q)}{d q} \dot{q}^3 . \quad (3.5b)$$

Po dosazení vztahů (3.3a) a (3.5a), resp. (3.3b) a (3.5b) do rovnice (3.1), dostaneme vlastní pohybovou rovnici soustavy při redukci na rotující člen ve tvaru

$$I_{red}(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{d I_{red}(q)}{d q} \dot{q}^2 = M_{red}(t, q, \dot{q}) , \quad (3.6a)$$

resp. při redukci na posouvající člen ve tvaru

$$m_{red}(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{d m_{red}(q)}{d q} \dot{q}^2 = F_{red}(t, q, \dot{q}) . \quad (3.6b)$$

Pohybové rovnice (3.6a) nebo (3.6b) jsou nelineární diferenciální rovnice 2.řádu. Jsou tudíž integrovatelné v uzavřeném tvaru jen ve speciálních případech funkcí M_{red} , I_{red} , resp. F_{red} , m_{red} . K výraznému zjednodušení vlastní pohybové rovnice dochází u soustav s konstantními převody, u nichž I_{red} , resp. m_{red} , jsou konstantní. Pohybové rovnice (3.6a), resp. (3.6b) se pak zřejmě zjednoduší do tvaru

$$I_{red} \ddot{q} = M_{red}(t, q, \dot{q}) , \quad (3.7a)$$

resp.

$$m_{red} \ddot{q} = F_{red}(t, q, \dot{q}) . \quad (3.7b)$$

V případě pohonových soustav s pasivními odpory jsou mezi pracovními silami odporové (třecí) síly, které jsou obecně funkcí reakcí. Příslušná pohybová rovnice by tedy nebyla vlastní pohybovou rovnicí. Uvedenou potíž u pohonových soustav s pasivními odpory lze u některých jednoduchých soustav odstranit, jestliže se podaří vyjádřit příslušnou reakci přímo akčními silami nebo přibližným vyjádřením vlivu pasivních účinků, např. výkonem pasivních odporů jako podílu výkonu hnacích sil, popř. pomocí účinností.

Převážnou většinu reálných pohonových soustav vyšetřujeme jako diskrétní modelové pohonové soustavy o více stupních volnosti, u nichž v důsledku různých převodů mezi jednotlivými tělesy je obtížné sestavit pohybové rovnice přímo. I u těchto soustav je možné provést redukci na společný rotační člen nebo posuvný člen, čímž se podstatně zjednoduší a zpřehlední sestavení potřebných pohybových rovnic. Redukce původní modelové pohonové soustavy se často provádí na hnací člen, přičemž počet stupňů volnosti původní modelové pohonové soustavy a po její redukci musí být totožný. Pro náhradu původní modelové pohonové soustavy jejím náhradním redukova-

ným modelem je zapotřebí dodržet následující postup :

- soustavu rozdělíme na subsystemy, přičemž počet subsystemů je roven nebo je větší než počet stupňů volnosti původní modelové mechanické soustavy,
- zvolí se rotační nebo posuvný člen, na který chceme celou soustavu redukovat,
- vypočtou se jednotlivé převody mezi pohyby prvků původní pohonové soustavy a pohybem členu, na který se provádí redukce,
- provede se redukce jednotlivých parametrů subsystemů na společný člen
- sestaví se pohybové rovnice redukované soustavy, přičemž počet pohybových rovnic odpovídá počtu zvolených subsystemů.

3.1.2. Lagrangeovy rovnice druhého druhu

Lagrangeovy rovnice druhého druhu jsou nejužívanější metodou analytické mechaniky při sestavování pohybových rovnic vázaných pohonových soustav. Umožňují sestavovat pohybové rovnice, z nichž jsou předem vyloučeny všechny vazbové síly, což je významné zejména u složitějších pohonových soustav. Metodický postup při sestavování pohybových rovnic zůstává v platnosti bez ohledu na druh souřadnicového systému, což umožňuje použít libovolný souřadnicový systém. Výhodou je i skutečnost, že jedinou dynamickou veličinou, kterou je nutno vyjádřit, je kinetická energie E_k , což bývá zpravidla jednoduché. U konzervativních soustav lze dále využít pojmu potenciální energie E_p a pracovat pak pouze se skalárními veličinami E_k a E_p .

Obvyklý tvar rovnic je formulován pro holonomní vazby v nezávislých zobecněných souřadnicích. Pro soustavy s neholonomními vazbami lineárními v rychlostech nebo při použití závislých (přebytečných) souřadnic používáme Lagrangeových rovnic druhého druhu s multiplikátory (Lagrangeových rovnic smíšeného typu).

Uvažujme pohonovou soustavu, kterou lze modelovat jako soustavu N hmotných bodů o hmotnostech m_i s n stupni volnosti, obecně mezi sebou vázaných vazebními rovnicemi typu

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad (3.8)$$

kde \vec{r}_i představuje radiusvektor uvažovaného bodu a q_1, q_2, \dots, q_n je n zobecněných (nezávislých) souřadnic – uvažujeme tedy pouze vazby holonomní, ať už reonomní nebo skleronomní.

Při odvození základního tvaru Lagrangeových rovnic druhého druhu pro soustavu hmotných bodů vyjdeme z principu virtuálních prací ve tvaru

$$\sum_{i=1}^N [\vec{F}_i - m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i] \delta \vec{r}_i = 0, \quad (3.9)$$

kde \vec{F}_i jsou pracovní síly působící na i -tý hmotný bod. Uvážíme-li, že variace radiusvektoru i -tého bodu je dána následujícím výrazem

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

pak po dosazení tohoto výrazu do vztahu (3.9) dostaneme rovnici

$$\sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j - \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0, \quad (3.10)$$

která bude (vzhledem k libovolnosti variací zobecněných souřadnic) splněna tehdy, když budou splněny následující rovnice

$$Q_j - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = 0, \quad (3.11)$$

kde Q_j je zobecněná síla odpovídající souřadnici q_j , přičemž je dána výrazem

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (3.12)$$

Další postup spočívá ve vhodnějším vyjádření druhého výrazu na levé straně rovnice (3.11). Derivováním rovnic vazby (3.8) dostaneme pro rychlosti následující vztah

$$\dot{\vec{r}}_i \equiv \frac{d \vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad (3.13)$$

a po jeho parciální derivaci podle \dot{q}_j dostaneme

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad (3.14)$$

dále zřejmě platí

$$\ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left[\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] - \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right]. \quad (3.15)$$

V posledním členu (3.15) lze však psát

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}, \quad (3.16)$$

jak plyne z totální derivace výrazu $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ podle času

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t},$$

a parciální derivace výrazu (3.13) podle q_j

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j},$$

jejich porovnáním. S využitím vztahů (3.14) a (3.16) lze výraz (3.15) přepsat ve tvaru

$$\ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left[\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] - \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}, \quad (3.17)$$

který dosadíme do rovnice (3.11), tím obdržíme

$$\sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \right] = Q_j. \quad (3.18)$$

Jestliže ze vztahu pro kinetickou energii soustavy

$$E_k = \sum_{i=1}^N E_{k_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2,$$

sestavíme výrazy

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}, \quad (3.19)$$

kterých využijeme ve vztahu (3.18), tím obdržíme následující rovnici

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j, \quad (3.20)$$

která představuje **základní tvar Lagrangeových rovnic druhého druhu**, platných pro libovolnou pohonovou soustavu podrobenou holonomním (reonomním nebo skleronomním) vazbám.

V technické praxi se často setkáme s případy, kdy všechny pracovní síly jsou silami, pro něž existuje stacionární potenciální pole (takovým soustavám říkáme, že jsou konzervativní). V takovém případě lze vyjádřit zobecněnou sílu odpovídající těmto silám pomocí potenciální energie

$$Q_j = -\frac{\partial E_p}{\partial q_j}, \quad (3.21)$$

tím dostanou Lagrangeovy rovnice druhého druhu tvar

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} = 0. \quad (3.22)$$

Často je konzervativnost systému porušena pouze tlumícími silami, lineárně závislými na rychlostech $\vec{F}_i = -b_i \vec{v}_i$, kde hodnoty b_i představují koeficienty lineárního (viskózního) tlumení. Potom lze zobecněnou sílu lineárního (viskózního) tlumení

$$^d Q_j = -\sum_{i=1}^N b_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j},$$

vyjádřit pomocí tzv. Rayleighovy disipativní funkce

$$R_d = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N b_i \vec{v}_i^2, \quad (3.23)$$

následujícím vztahem

$${}^d Q_j = -\frac{\partial R_d}{\partial \dot{q}_j}, \quad (3.24)$$

přičemž funkce R_d je skalární veličinou.

Jsou-li mezi pracovními silami vedle sil potenciálních a disipativních ještě síly jiného typu, lze pomocí disipativní funkce napsat Lagrangeovy rovnice druhého druhu ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} + \frac{\partial R_d}{\partial \dot{q}_j} = Q_j. \quad (3.25)$$

3.1.3. Lagrangeovy rovnice druhého druhu s multiplikátory

Tento tvar rovnic se používá jednak v případech, kdy nelze nebo kdy nechceme vyloučit přebytečné (závislé) souřadnice, jednak u soustav s neholonomními vazbami.

Pro soustavu s n stupni volnosti, s $(n+k)$ souřadnicemi (tj. soustava s k přebytečnými souřadnicemi), z nichž k je vázáno holonomními vazbami

$$f_s(q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots, q_{n+k}, t) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, k, \quad (3.26)$$

platí podle (3.10) následující rovnice

$$\sum_{j=1}^{n+k} \left[\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0, \quad (3.27)$$

přitom však pouze n variací δq_j ($j = 1, 2, \dots, n$) je nezávislých, ostatní jsou vázány k vztahy

$$\sum_{j=1}^{n+k} \frac{\partial f_s}{\partial q_j} \delta q_j = 0,$$

které dostaneme variováním vztahu (3.26). Vynásobením posledního vztahu (3.28) neznámým koeficientem λ_s a přičtením tohoto vztahu od rovnice (3.27), obdržíme vztah

$$\sum_{j=1}^{n+k} \left[\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{s=1}^k \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0. \quad (3.28)$$

Protože koeficienty λ_s mohou být libovolné, zvolíme je tak, aby výrazy v hranatých závorkách vztahu (3.28) byly rovny nule, tj. aby platilo

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{s=1}^k \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial q_j} = 0, \quad (3.29)$$

pro všechna $j = 1, 2, \dots, n+k$. Multiplikátory λ_s jsou ovšem neznámé a nutno je vypočítat na základě podmínek uvedených při jejich zavedení.

Upravíme-li první dva členy ve vztahu (3.29) podobně jako při odvození základního tvaru Lagrangeových rovnic druhého druhu, dostaneme soustavu rovnic

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{s=1}^k \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial q_j}, \quad (3.30)$$

pro $j = 1, 2, \dots, n+k$, které spolu s k rovnicemi vazby (3.26) umožňují určit $(n+k)$ průběhů souřadnic $q_j(t)$ a k neznámých koeficientů λ_s .

Fyzikální smysl Lagrangeových multiplikátorů spočívá v tom, že vyjadřují zobecněnou vazbovou sílu, odpovídající reakčnímu účinku vazeb. Přitom platí

$$\sum_{s=1}^k \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial q_j} = Q_j^V = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^V \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (3.31)$$

Prostřednictvím multiplikátorů lze tedy do Lagrangeových rovnic druhého druhu zavádět vazbové síly, resp. reakce, a lze je tedy z těchto rovnic vypočítat. Jiný postup zavedení reakcí do Lagrangeových rovnic druhého druhu spočívá v aplikaci principu uvolňování, podle něhož dynamický systém s vazbami lze vyšetřovat jako systém bez vazeb, jestliže účinky těchto vazeb nahradíme příslušnými reakcemi. Často postupujeme také tak, že nejprve vyšetříme časové průběhy nezávislých souřadnic z vlastních pohybových rovnic a reakce potom určíme z pohybových rovnic, sestavených metodami vektorové mechaniky (uvolňováním).

Pro soustavu s n stupni volnosti a k přebytnými souřadnicemi podrobenou navíc l neholonomním vazbám typu

$$g_s(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, l, \quad (3.32)$$

dostaneme Lagrangeovy rovnice druhého druhu ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{s=1}^k \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial q_j} + \sum_{s=1}^l \bar{\lambda}_s \frac{\partial g_s}{\partial \dot{q}_j}, \quad (3.33)$$

pro $j = 1, 2, \dots, n+k+l$, které řešíme spolu s $(k+l)$ rovnicemi vazby (3.26) a (3.32). Určíme tak $(n+k+l)$ souřadnic $q_j(t)$ a $(k+l)$ multiplikátorů λ_s a $\bar{\lambda}_s$.

Fyzikální smysl multiplikátorů λ_s a $\bar{\lambda}_s$ je analogický jako ve vztahu (3.31) a lze pomocí nich určit příslušnou zobecněnou vazbovou sílu

$$\sum_{s=1}^k \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial q_j} + \sum_{s=1}^l \bar{\lambda}_s \frac{\partial g_s}{\partial \dot{q}_j} = Q_j^V = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^V \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (3.34)$$

3.1.4. Hamiltonův princip

Hamiltonův princip je z hlediska řešení technických úloh nejvýznamnějším z integrálních variačních principů. Integrální principy zkoumají soustavu v určitém konečném časovém intervalu a sledují ji jako celek. Variačními se nazývají proto, že sestavení pohybových rovnic vyplyne z podmínky nulové variace (tj. stacionárnosti) určitého omezeného integrálu J (funkcionálu), který je nezávislý na jistých skalárních mechanických veličinách. Variační úloha je přitom formulována tak, že se v časovém intervalu sleduje pohyb pohonové soustavy po různých virtuálních drahách (splňu-

jící podmínky vazeb), které však v koncových bodech intervalu odpovídají poloze soustavy při skutečném pohybu. Přitom se mezi těmito variovanými dráhami hledá taková, na níž příslušný funkcionál J má stacionární hodnotu (tj. $\delta J = 0$), tzn. že hledaná trajektorie je pak extrémalou funkcionálu J . Hledané pohybové rovnice jsou pak totožné s Eulerovými rovnicemi příslušného variačního problému.

Výhodou tohoto principu je zejména skutečnost, že jeho formulace je nezávislá na volbě souřadnicového systému a že jeho platnost není omezena jen na oblast klasické mechaniky. Principu lze dobře využít k sestavování pohybových rovnic složitých systémů, např. systémů se spojitě rozloženými parametry, systémů obsahujících i nemechanické prvky a dále k formulaci některých přibližných metod popisujících chování složitých systémů. V případech, kdy použití Hamiltonova principu vede k Lagrangeovým rovnicím druhého druhu, je ovšem jejich přímé použití rychlejší (tak tomu bývá zpravidla u diskrétních modelů pohonových soustav).

Při odvození Hamiltonova principu vyjdeme z principu virtuálních prací pro soustavu N hmotných bodů ve tvaru

$$\sum_{i=1}^N [\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i] \delta \vec{r}_i = 0,$$

který můžeme s využitím identity

$$\ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i = \frac{d(\dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i)}{dt} - \dot{\vec{r}}_i \delta \dot{\vec{r}}_i,$$

přepsat do následujícího tvaru

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \delta \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d(\dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i)}{dt}. \quad (3.35)$$

Uvážíme-li, že pro členy na levé straně rovnice (3.35) platí :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = A &\rightarrow \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \delta A \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = E_k &\rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \delta \dot{\vec{r}}_i = \delta E_k \end{aligned}$$

kde δA je variace práce působících sil a δE_k je variace kinetické energie, pak lze rovnici (3.35) psát ve tvaru

$$\delta A + \delta E_k = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i \right),$$

a po integraci tohoto vztahu v časovém intervalu a, b , dostaneme

$$\int_a^b (\delta A + \delta E_k) dt = \left[\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i \right]_a^b. \quad (3.36)$$

Jelikož variované trajektorie jsou voleny tak, aby v koncových bodech časového intervalu a, b bylo

$$(\delta \vec{r}_i)_{t=a} = (\delta \vec{r}_i)_{t=b} = 0,$$

bude výraz na pravé straně rovnice (3.36) roven nule, čímž obdržíme vztah

$$\delta J \equiv \delta \int_a^b (A + E_k) dt = 0, \quad (3.37)$$

který je matematickým vyjádřením Hamiltonova principu : *Sledujeme-li pohyb soustavy po libovolných izochronně variovaných drahách, které v koncových bodech časového intervalu procházejí stejnými body jako při skutečném pohybu, pak pro skutečný pohyb soustavy platí, že variace integrálu J je rovna nule.*

Jestliže síly působící na soustavu mají potenciál, potom platí $\delta A = -\delta E_p$, a Hamiltonův princip se vyjádří takto

$$\delta J \equiv \delta \int_a^b (E_k - E_p) dt = 0. \quad (3.38)$$

3.2. Mechanické charakteristiky motorů a pracovních strojů

Pro správnou analýzu dynamických vlastností pohonových soustav je nutné znát vnější vlastnosti poháněného pracovního stroje a motoru. Tyto vnější charakteristiky definují tzv. **momentové charakteristiky**, které vyjadřují závislost momentu zatížení M_Z , nebo hnacího momentu M_H na úhlové rychlosti ω , resp. úhlové poloze φ výstupního členu pracovního stroje a motoru. Obecně lze mechanickou charakteristiku motoru, resp. pracovního stroje, vyjádřit rovnicí

$$M_H = M_H(u_H, q_H, \dot{q}_H), \quad \text{resp.} \quad M_Z = M_Z(u_Z, q_Z, \dot{q}_Z), \quad (3.39)$$

kde : u_H, u_Z vstupní řídicí parametr motoru, pracovního stroje,

q_H, q_Z zobecněná souřadnice motoru, pracovního stroje,

\dot{q}_H, \dot{q}_Z zobecněná rychlost motoru, pracovního stroje.

Vzájemný vztah mechanických charakteristik motoru a pracovního stroje, nám určuje dynamický režim pohonové soustavy. V praktických případech nám analýza dynamických vlastností pohonových soustav vede k řešení pohybové rovnice

$$M_{DYN} = M_H(\varphi_H, \omega_H) - M_Z(\varphi_Z, \omega_Z), \quad (3.40)$$

kde : M_{DYN} redukovaný dynamický moment soustavy, $I \frac{d\omega}{dt}$, resp. $I \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dI}{d\varphi} \cdot \omega^2$,

M_H hnací moment motoru redukovaný na hnací člen mechanické soustavy,

M_Z zatěžující moment pracovního stroje redukovaný na hnací člen mechanické soustavy.

Aby bylo možné pohybové rovnice typu (3.40) řešit, tj. abychom mohli provést analýzu dynamických vlastností pohonové soustavy, musíme znát analytické vyjádření hnacího a zatěžujícího momentu, které definují mechanické charakteristiky. Z hlediska struktury pohonové soustavy, tak jak byla uvedena v první kapitole na obr.1, uvažujeme dva typy mechanických charakteristik :

- **mechanické charakteristiky zatížení**, které reprezentují souhrnný zatěžující moment M_Z od všech sil, působících na pohonovou soustavu. Všeobecně závisí zatěžující moment M_Z na úhlové rychlosti ω a periodicky na poloze φ výstupního členu pohonové soustavy

$$M_Z(\varphi, \omega) = M_Z(\varphi + 2\pi, \omega), \quad (3.41)$$

- **momentové charakteristiky motorů**, které jsou definované jako funkční závislosti hnacího momentu M_H na úhlové rychlosti výstupního členu pohonové soustavy

$$M_H = M_H(\omega_H). \quad (3.42)$$

3.2.1. Mechanické charakteristiky zatížení

Zatěžující moment lze obecně vyjádřit vztahem

$$M_Z(\varphi, \omega) = M_C(\varphi) \pm M_R(\omega) = M_C(\varphi) - M_R(\omega) \cdot \operatorname{sgn} \omega, \quad (3.43)$$

kdy předpokládáme, že zatěžující moment $M_Z(\varphi, \omega)$ je možné rozdělit na dvě složky, a to na složku závislou jen na poloze hlavního členu $M_C(\varphi)$ a na složku $M_R(\omega)$ závislou jen na úhlové rychlosti ω . První člen $M_C(\varphi)$ obsahuje momenty, které souvisí se změnou potenciální energie, tedy od konzervativních sil působících v pohonové soustavě. Druhý člen $M_R(\omega)$ tvoří momenty vznikající v technologickém procesu a třecí momenty (při změně smyslu otáčení pracovního stroje mění své znaménko a působí vždy proti pohybu hlavního členu pohonové soustavy). Z výše uvedeného vyplývá, že zatěžující momenty lze rozdělit do dvou kategorií :

- odporové zatěžující momenty $M_R(\omega)$,
- aktivní zatěžující momenty $M_C(\varphi)$.

3.2.1.1. Odporové zatěžující momenty

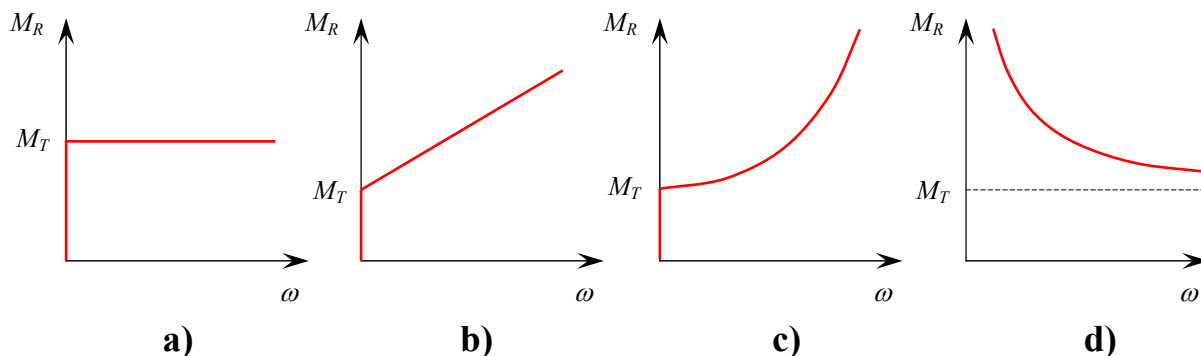
Obecně lze závislost odporového zatěžujícího momentu na úhlové rychlosti při jednosměrném otáčení vyjádřit pomocí následujícího vztahu :

$$M_R(\omega) = M_T + (M_N - M_T) \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_N} \right)^x, \quad (3.44)$$

kde : M_T moment tření v klidu,

M_N zatěžující moment při nominální úhlové rychlosti ω_N ,

X exponent určující mechanickou charakteristiku zatížení. Pro klasifikaci pracovních strojů lze použít hodnot $X = -1, 0, 1, 2, 3, \dots$, přičemž je nutné si uvědomit, že obecně nemusí být X celé číslo.



Obr.12. Mechanické charakteristiky zatížení – odporové zatěžující momenty.

Nyní si uvedeme základní kategorie odporových zatěžujících momentů vyskytujících se v praxi :

- $X = 0$ - charakteristika nezávislá na úhlové rychlosti ω , tj. $M_R(\omega) = konst.$ (viz. obr.12a). Takovou charakteristiku mají zdvihací zařízení, pojezdové mechanismy jeřábů, podávací mechanismy a třískové obráběcí stroje pracující s řeznou rychlostí úměrnou posuvu. Při jednomsměrném otáčení může být zatížení i zatížení suchým (Coulombovým) třením, kdy $M_N = M_T$ pak rovnice (3.44) má tvar $M_R(\omega) = M_T \cdot \operatorname{sgn} \omega$.
- $X = 1$ - zatížení lineárně závisí na úhlové rychlosti ω , viz. obr.12b. Takovou charakteristiku má např. pohon stejnosměrného motoru s cizím buzením, zatíženého konstantním odporem.
- $X = 2$ - zatížení nelineárně závisí na úhlové rychlosti ω , viz. obr.12c. Tuto charakteristiku mají prakticky všechna zařízení která překonávají odpor vzduchu nebo tekutin (ventilátory, odstředivá čerpadla, ...).
- $X = -1$ - zatížení hyperbolicky klesá s úhlovou rychlostí ω , viz. obr.12d. Tuto charakteristiku mají navíjecí zařízení v textilním, papírenském a hutnickém průmyslu, kde se požaduje konstantní rychlost navíjeného materiálu i konstantní tahová síla v materiálu.

3.2.1.2. Aktivní zatěžující momenty

Na dynamické procesy v pohonové soustavě mají značný vliv zatížení s proměnnou periodickou složkou. Tento druh zatížení obvykle závisí od úhlu pootočení hlavního členu a způsobuje ho :

- periodická změna vnějšího zatížení,
- nelineární kinematické vazby typu klikového, vačkového nebo kulisového mechanismu.

V daném případě jsme předpokládali, že aktivní zatěžující momenty závisí periodicky na poloze φ hlavního členu mechanické soustavy, tedy

$$M_C(\varphi) = M_C(\varphi + 2\pi), \quad (3.45)$$

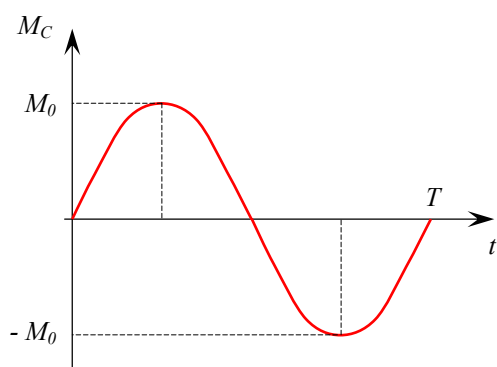
takže lze tuto složku zatěžujících momentů vyjádřit ve tvaru Fourierovy řady

$$M_C(\varphi) \cong \frac{C_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \cos j\varphi + S_j \sin j\varphi, \quad (3.46)$$

kde jednotlivé koeficienty této řady jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} M_C(\varphi) d\varphi, \\ C_j &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} M_C(\varphi) \cdot \cos j\varphi d\varphi, \\ S_j &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} M_C(\varphi) \cdot \sin j\varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Pro řadu pohonových soustav má zatěžující moment od technologických odporů periodický charakter v závislosti na čase t , přičemž velkou důležitost pro analýzu dynamických vlastností pohonových soustav má trvale působící harmonické zatížení, viz. obr.13.



Obr.13.. Harmonický zatěžující moment.

Harmonický průběh aktivního zatěžujícího momentu lze popsat vztahem

$$M_C(t) = M_0 \cdot \sin \omega t, \quad (3.48)$$

kde : M_0 amplituda zatížení,

ω frekvence zatížení.

Perioda harmonického aktivního zatěžujícího momentu je dána výrazem

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (3.49)$$

Aktivní zatěžující momenty periodicky závislé na čase t lze, stejně jako aktivní zatěžující momenty závislé na poloze φ hlavního členu, vyjádřit ve tvaru Fourierovy řady

$$M_C(t) \cong \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos j \frac{2\pi}{T} t + B_j \sin j \frac{2\pi}{T} t, \quad (3.50)$$

resp. po uvážení vztahu (3.49) ve tvaru

$$M_C(t) \cong \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos j\omega t + B_j \sin j\omega t, \quad (3.51)$$

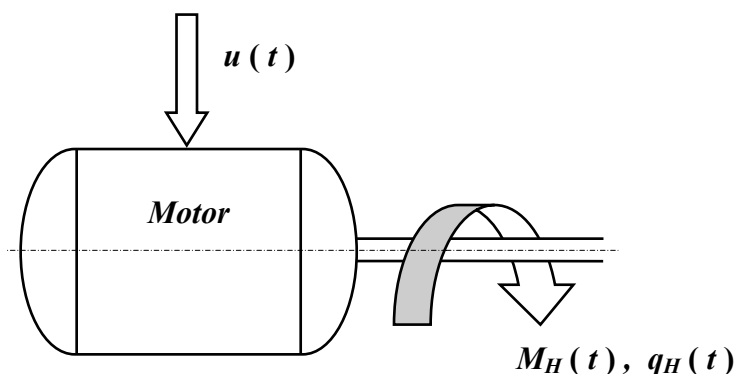
kde koeficienty Fourierovy řady (3.50) stanovíme ze vztahů

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T M_C(t) dt, \\
 A_j &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T M_C(t) \cdot \cos j \frac{2\pi}{T} t dt, \\
 B_j &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T M_C(t) \cdot \sin j \frac{2\pi}{T} t dt.
 \end{aligned}
 \tag{3.52}$$

V příloze, uvedené na konci této práce, jsou uvedeny funkční vztahy různých typů aktivních zatěžovacích momentů spolu s výrazy pro jejich Fourierovy rozvoje.

3.2.2. Momentové charakteristiky motorů

Při analýze dynamických vlastností pohonových soustav mají hlavní význam jen ty vlastnosti motorů, které ovlivňují charakter jejich vzájemného působení s ostatními funkčními částmi mechanické soustavy. Tyto vzájemné vztahy určuje vazba mezi vstupními a výstupními parametry motoru (viz. obr.14), tedy mezi vstupní veličinou $u(t)$ řídící procesy přeměny energie v motoru, zákonem změny souřadnice výstupního členu $q_H(t)$ a zobecněným hnacím momentem $M_H(t)$, resp. zobecněnou hnací silou $Q_H(t)$.



Obr.14. Schématické znázornění motoru.

Volbou některé charakteristiky motoru, která vyjadřuje vazbu mezi uvedenými parametry je vlastně volbou dynamického modelu pohonové soustavy. V závislosti na stupni idealizace vlastností motoru, rozlišujeme následující typy charakteristik :

- ideální charakteristiky motoru,
- statické charakteristiky motoru,
- dynamické charakteristiky motoru.

3.2.2.1. Ideální charakteristiky motorů

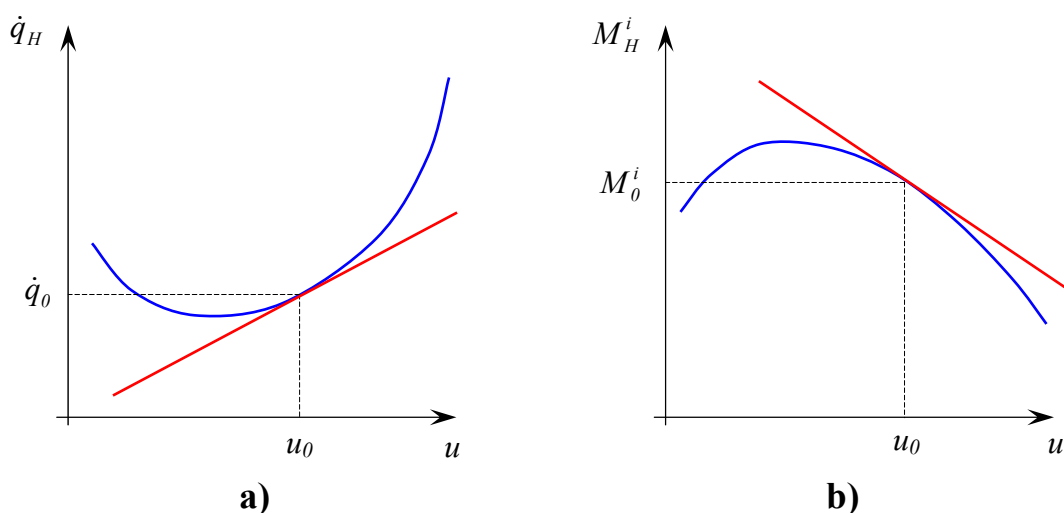
Při podmínce, že rychlost výstupního členu \dot{q}_H v každém časovém okamžiku závisí pouze na hodnotě vstupní veličiny u , pak hovoříme o **ideální kinematické charakteristice** motoru

$$\dot{q}_H = f_i(u). \quad (3.53)$$

Tato charakteristika se používá pro hrubý popis vlastností motoru a používá se zejména v první etapě projektování pohonové soustavy. Lze ji použít pouze pro motory, kde vliv zatížení na rychlost motoru lze zanedbat. Za předpokladu, že zobecněný hnací moment M_H nezávisí na rychlosti \dot{q}_H výstupního členu – je funkcí vstupní veličiny u , hovoříme o **ideální momentové charakteristice** motoru

$$M_H^i = M_H^i(u). \quad (3.54)$$

V převážné většině případů jsou ideální kinematická i momentová charakteristika motoru nelineární (viz. obr.15). Pak za předpokladu, že tyto charakteristiky jsou spojitě a hladké, lze ideální charakteristiky motoru linearizovat v okolí pracovního bodu $u = u_0$.



Obr.15. Ideální kinematická charakteristika a), ideální momentová charakteristika b).

Za tím účelem si rozvineme funkce na pravých stranách rovnic (3.53) a (3.54) do Taylorových řad v okolí pracovního bodu $u = u_0$

$$\dot{q}_H = \dot{q}_0 + \frac{d f_i(u_0)}{d u} \cdot (u - u_0) + \dots,$$

$$M_H^i = M_H^0 + \frac{d M_H^i(u_0)}{d u} \cdot (u - u_0) + \dots,$$

přičemž v těchto rozvojech zanedbáme všechny veličiny druhého a vyššího řádu. Tím pro ideální charakteristiky motoru obdržíme následující idealizované rovnice

$$\dot{q}_H = \dot{q}_0 + \beta_q^i \cdot (u - u_0), \quad (3.55)$$

$$M_H^i = M_H^0 + \beta_M^i \cdot (u - u_0), \quad (3.56)$$

kde veličiny β_q^i, β_M^i jsou dány vztahy

$$\beta_q^i = \frac{d f_i(u_0)}{d u}, \quad \beta_M^i = \frac{d M_H^i(u_0)}{d u}, \quad (3.57)$$

a představují nám tuhosti ideální kinematické a momentové charakteristiky motoru v bodě $u = u_0$.

3.2.2.2. Statické charakteristiky motorů

Zohlednění vlivu rychlosti \dot{q}_H výstupního členu na zobecněný hnací moment M_H ve vztazích pro ideální charakteristiky motoru nám vede ke **statické kinematické charakteristice** motoru

$$\dot{q}_H = f_s(u, M_H), \quad (3.58)$$

nebo ke **statické momentové charakteristice** motoru

$$M_H^S = M_H^S(u, \dot{q}_H). \quad (3.59)$$

U motorů ve kterých přenos pohybu na výstupní člen se vykonává pomocí mechanismů s nelineárními funkcemi polohy q_H (klikové mechanismy spalovacích motorů) nám statickou charakteristiku vyjadřuje funkční závislost

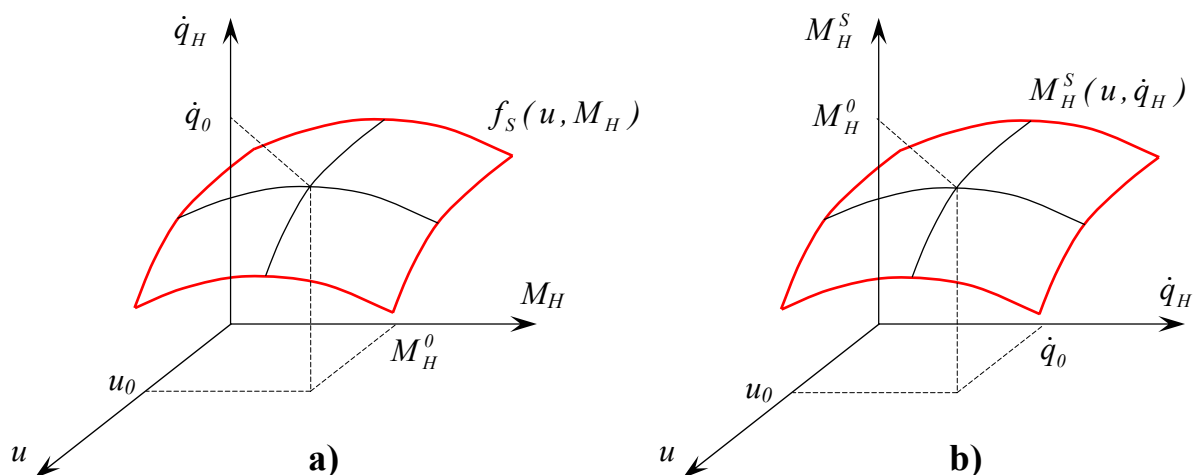
$$\dot{q}_H = f_s(u, M_H, q_H), \quad (3.60)$$

nebo

$$M_H^S = M_H^S(u, q_H, \dot{q}_H). \quad (3.61)$$

Statické charakteristiky motorů vyjadřují závislost mezi konstantní rychlostí výstupního členu při konstantní hodnotě vstupní veličiny u . Lze je použít pouze v těch případech, kdy změny zatížení a rychlosti probíhají dostatečně pomalu.

Ze vztahu (3.58), resp. (3.59) je zřejmé, že statické charakteristiky motorů jsou obecně nelineárními funkcemi dvou parametrů, viz. obr.16. Předpokládáme-li, že statické charakteristiky jsou spojitě a hladké, lze tyto charakteristiky linearizovat v okolí pracovního bodu (u_0, M_H^0) , resp. (u_0, \dot{q}_0) .



Obr.16. Statická kinematická charakteristika a), statická momentová charakteristika b).

Za tím účelem si rozvineme funkce na pravých stranách rovnic (3.58) a (3.59) do Taylorových řad v okolí pracovního bodu (u_0, M_H^0) , resp. (u_0, \dot{q}_0)

$$\dot{q}_H = \dot{q}_0 + \frac{\partial f_s(u_0, M_H^0)}{\partial u} \cdot (u - u_0) + \frac{\partial f_s(u_0, M_H^0)}{\partial M_H} \cdot (M_H - M_H^0) + \dots,$$

$$M_H^S = M_H^0 + \frac{\partial M_H^S(u_0, \dot{q}_0)}{\partial u} \cdot (u - u_0) + \frac{\partial M_H^S(u_0, \dot{q}_0)}{\partial \dot{q}_H} \cdot (\dot{q}_H - \dot{q}_0) + \dots,$$

přičemž v těchto rozvojiích zanedbáme všechny veličiny druhého a vyššího řádu. Tím pro statické charakteristiky motoru obdržíme následující linearizované rovnice

$$\dot{q}_H = \dot{q}_0 + \beta_{q,u}^S \cdot (u - u_0) + \beta_{q,M}^S \cdot (M_H - M_H^0), \quad (3.62)$$

$$M_H^S = M_H^0 + \beta_{M,u}^S \cdot (u - u_0) + \beta_{M,\dot{q}}^S \cdot (\dot{q}_H - \dot{q}_0), \quad (3.63)$$

kde veličiny $\beta_{q,u}^S, \beta_{q,M}^S, \beta_{M,u}^S, \beta_{M,\dot{q}}^S$ jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} \beta_{q,u}^S &= \frac{\partial f_s(u_0, M_H^0)}{\partial u}, & \beta_{q,M}^S &= \frac{\partial f_s(u_0, M_H^0)}{\partial M_H}, \\ \beta_{M,u}^S &= \frac{\partial M_H^S(u_0, M_H^0)}{\partial u}, & \beta_{M,\dot{q}}^S &= \frac{\partial M_H^S(u_0, M_H^0)}{\partial \dot{q}_H}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

a představují nám tuhosti statických charakteristik motoru v pracovním bodě.

3.2.2.3. Dynamické charakteristiky motorů

Z důvodů setrvačnosti fyzikálně – chemických procesů přeměny energie v motoru, je hodnota rychlosti \dot{q}_H výstupního členu v daném časovém okamžiku závislá nejen na okamžité hodnotě zatížení, ale i na zákoně jeho změny v čase. Tuto skutečnost lze zohlednit zavedením derivace zobecněného hnacího momentu podle času do statických charakteristik motoru

$$\dot{q}_H = f_D \left(u, M_H + T \frac{dM_H}{dt} \right), \quad (3.65)$$

nebo

$$T \frac{dM_H^D}{dt} + M_H^D = M_H^S(u, \dot{q}_H), \quad (3.66)$$

kde parametr T je časová konstanta motoru. Rovnice (3.65), resp. (3.66) nám představuje **dynamickou kinematickou charakteristiku**, resp. **dynamickou momentovou charakteristiku** motoru. U motorů ve kterých přenos pohybu na výstupní člen se vykonává pomocí mechanismů s nelineárními funkcemi polohy q_H , nám dynamickou charakteristiku vyjadřují rovnice

$$\dot{q}_H = f_D \left(u, M_H + T \frac{dM_H}{dt}, q_H \right), \quad (3.67)$$

nebo

$$T \frac{dM_H^D}{dt} + M_H^D = M_H^S(u, q_H, \dot{q}_H). \quad (3.68)$$

Využijeme-li nyní v rovnici (3.66) vztahu pro linearizaci statické momentové charakteristiky (3.63), obdržíme **lineární dynamickou momentovou charakteristiku** motoru ve tvaru

$$T \frac{dM_H^D}{dt} + M_H^D = M_H^0 + \beta_{M,u}^S \cdot (u - u_0) + \beta_{M,\dot{q}}^S \cdot (\dot{q}_H - \dot{q}_0), \quad (3.69)$$

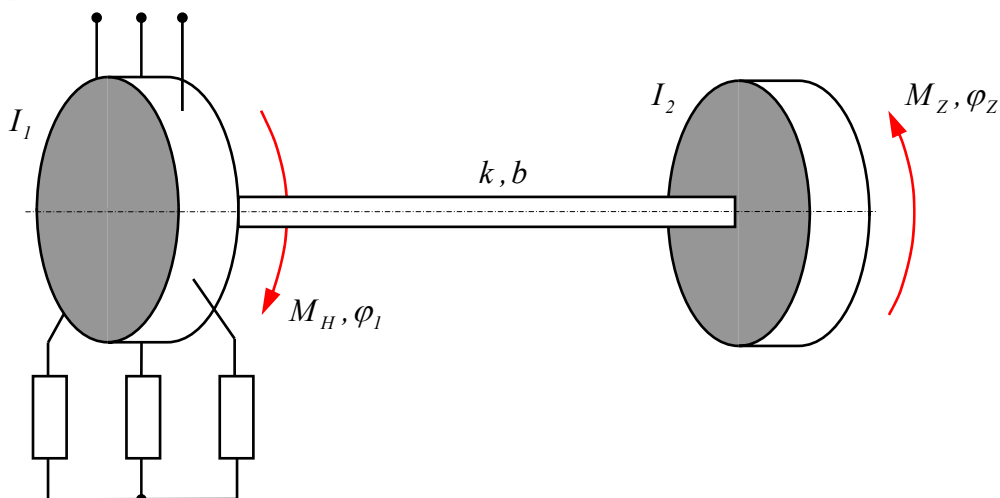
kde veličiny $\beta_{M,u}^S, \beta_{M,\dot{q}}^S$ jsou dány vztahy (3.64). Ze vztahů (3.65) až (3.68) je patrné, že položíme-li v těchto vztazích $T=0$, dostaneme výrazy pro statické charakteristiky motoru. Je nutné poznamenat, že dynamické charakteristiky (3.65) až (3.68) pro některé typy motorů (např. asynchronní elektrické motory) je možné použít jen pro analýzu takových pohybů, pro které se $M_H^D(t)$ mění v malých mezích, tj. platí-li $T \dot{M}_H^D \ll M_H^D$.

3.2.3. Momentové charakteristiky vybraných typů motorů

V tomto článku si uvedeme vztahy pro momentové charakteristiky nejčastěji užívaných motorů jakožto pohonů mechanických soustav, a to : asynchronního elektrického motoru, stejnosměrného elektrického motoru s cizím buzením, stejnosměrného elektrického motoru se sériovým buzením, hydromotoru s objemovou regulací a vznětového spalovacího motoru.

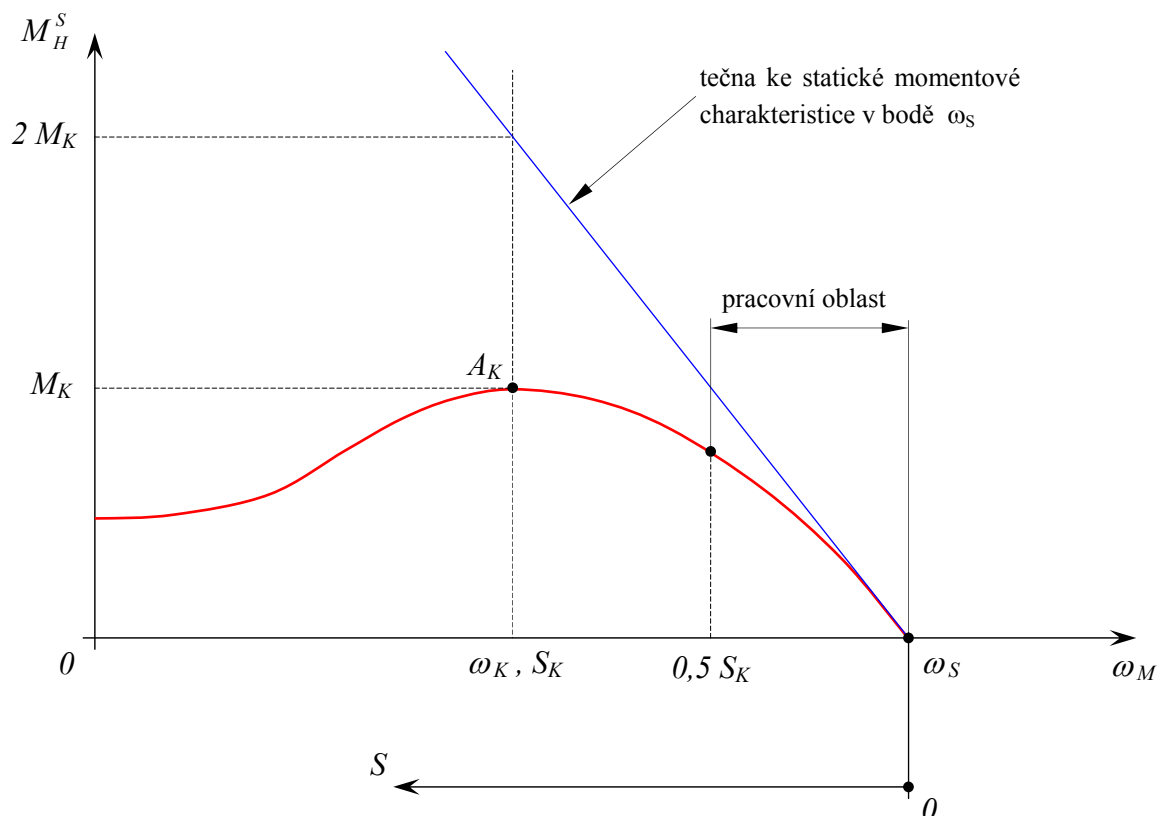
3.2.3.1. Momentové charakteristiky asynchronního elektromotoru

Dynamický model pohonové soustavy s asynchronním elektrickým motorem tvoří obvykle dvoukotoučová pružná soustava, jejíž schéma je uvedeno na obr.17.



Obr.17. Dynamický model pohonové soustavy s asynchronním elektromotorem.

Statická momentová charakteristika asynchronního elektrického motoru je znázorněna na obr.18,



Obr.18. Statická momentová charakteristika asynchronního elektrického motoru.

přičemž tuto charakteristiku lze obecně popsat ve tvaru zpřesněné Klossové charakteristiky

$$M_H^S = \frac{2 M_K (1 - a S_K)}{\frac{S_K}{S} + \frac{S}{S_K} + 2 a S_K}, \quad \omega_S = \frac{2 \pi f}{p}, \quad S = 1 - \frac{\omega_M}{\omega_S}, \quad (3.70)$$

kde : f frekvence napájecího napětí statoru,
 p počet pólových dvojic,
 ω_M mechanická úhlová rychlost motoru,
 ω_S synchronní úhlová rychlost motoru,
 S_K kritický skluz odpovídající momentu M_K ,
 M_K kritický (maximální) moment,
 a poměr činného odporu statoru a motoru.

Hodnoty parametrů a, M_K se určují z katalogů výrobců motorů. **Pracovní oblast** statické momentové charakteristiky odpovídá hodnotám skazu S z intervalu $(0; 0,5 S_K)$. Jestliže v dynamickém režimu hodnoty skazu S a momentu M_H^D nepřekračují hranice pracovní části statické momentové charakteristiky, můžeme **linearizovanou dynamickou momentovou charakteristiku** motoru podle vztahu (3.66) s ohledem na vztah (3.69) zapsat ve tvaru

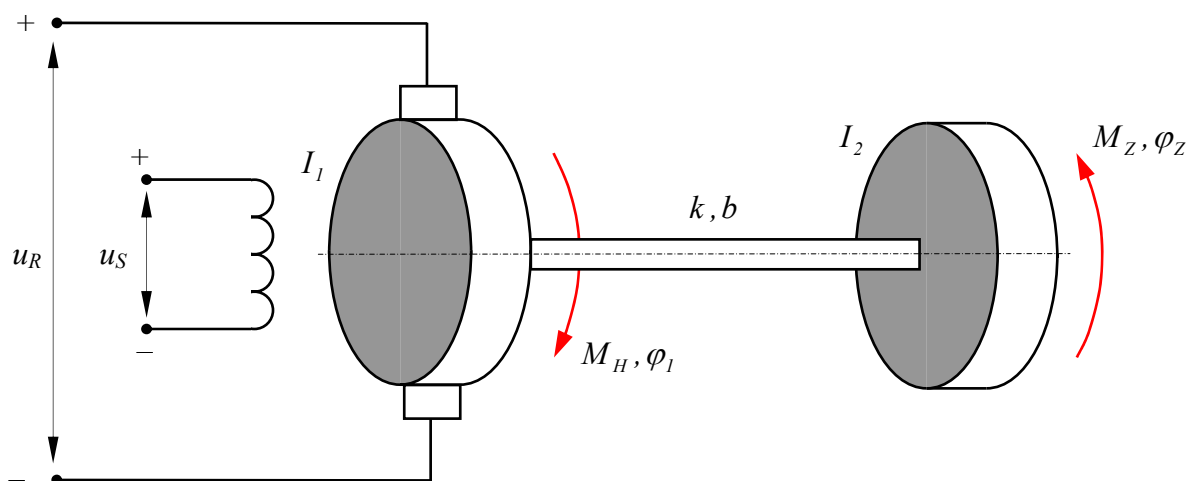
$$T_E \frac{d M_H^D}{dt} + M_H^D = \beta_D (\omega_S - \omega_M), \quad (3.71)$$

kde : $T_E = \frac{I}{p S_K \omega_S}$ elektromagnetická časová konstanta,

$\beta_D = \frac{2 M_K}{S_K \omega_S}$ koeficient tuhosti statické charakteristiky.

3.2.3.2. Momentové charakteristiky stejnosměrného elektrického motoru s cizím buzením

Dynamický model pohonové soustavy se stejnosměrným elektrickým motorem s cizím buzením tvoří obvykle dvoukotoučová pružná soustava, jejíž schéma je uvedeno na obr.19.



Obr.19. Dynamický model pohonové soustavy se stejnosměrným elektromotorem s cizím buzením.

Statická momentová charakteristika stejnosměrného elektrického motoru s cizím buzením je znázorněna na obr.20. **Linearizovaná dynamická momentová charakteristika** motoru je dána následující rovnicí

$$T_E \frac{d M_H^D}{dt} + M_H^D = \beta_D (\omega_S - \omega_M), \quad (3.72)$$

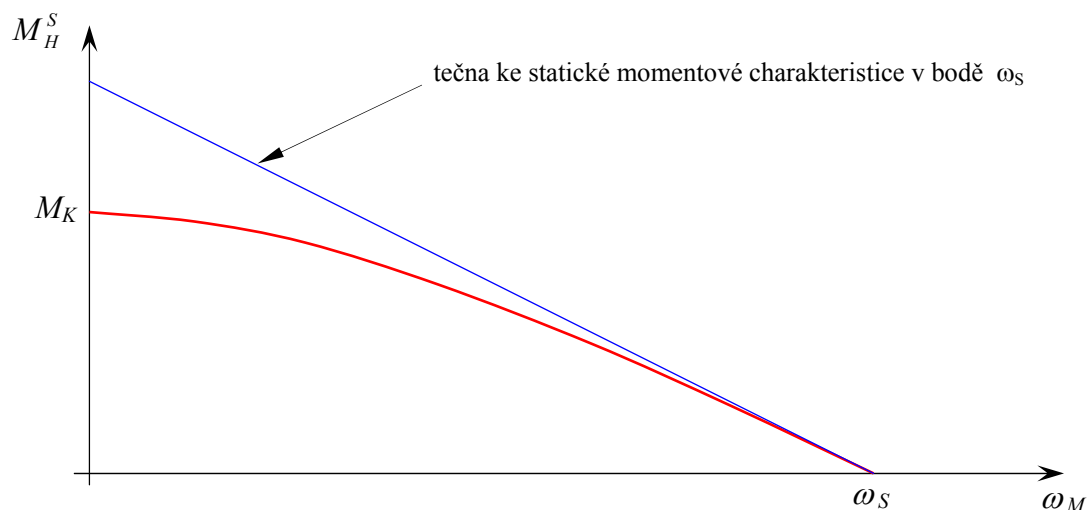
přičemž jednotlivé veličiny jsou dány vztahy

$$\omega_S = \frac{u_R}{k \cdot \phi}, \quad \beta_D = \frac{k^2 \phi^2}{R}, \quad T_E = \frac{L}{R}, \quad k = \frac{p N}{2 \pi a}, \quad (3.73)$$

kde : u_R napětí na kotvě,

R výsledný činný odpor kotvy,

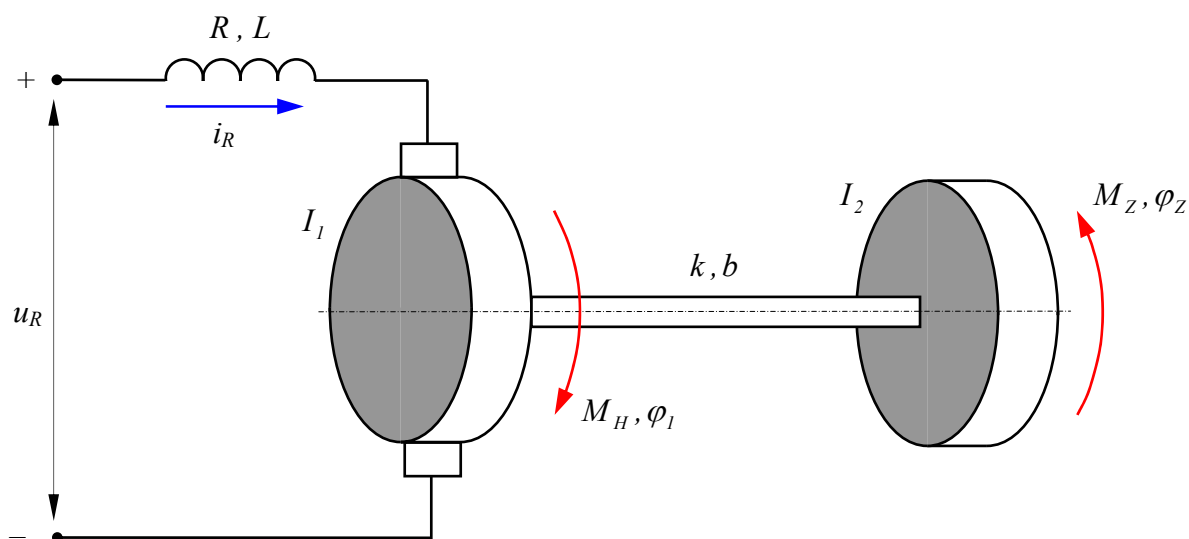
- ϕ magnetický tok vytvářený cívkou buzení,
 L výsledná indukčnost kotvy,
 N počet elektrických závitů kotvy,
 p počet pólových dvojic,
 a počet paralelních větví cívky kotvy.



Obr.20. Statická momentová charakteristika stejnosměrného elektromotoru s cizím buzením.

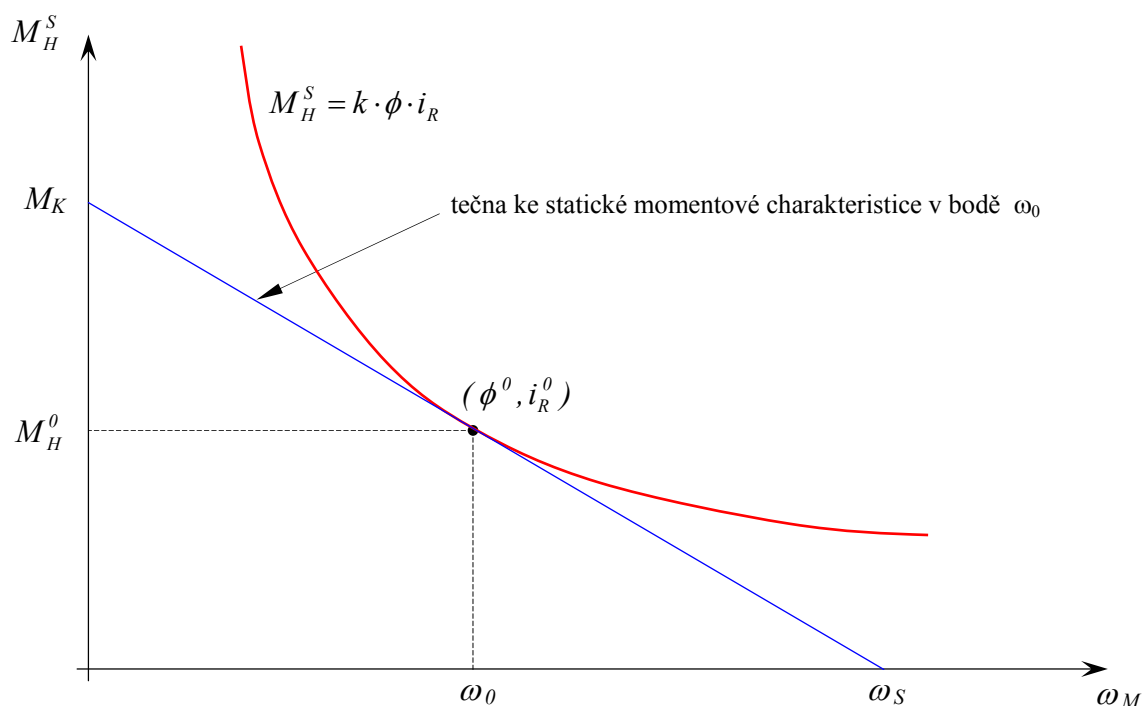
3.2.3.3. Momentové charakteristiky stejnosměrného elektrického motoru se sériovým buzením

Dynamický model pohonové soustavy se stejnosměrným elektrickým motorem se sériovým buzením tvoří obvykle dvoukotoučová pružná soustava, jejíž schéma je uvedeno na obr.21.



Obr.21. Dynamický model pohonové soustavy se stejnosměrným elektromotorem se sériovým buzením.

Statická momentová charakteristika stejnosměrného elektrického motoru se sériovým buzením je znázorněna na obr.22.



Obr.22. Statická momentová charakteristika stejnosměrného elektromotoru se sériovým buzením.

Linearizovaná dynamická momentová charakteristika motoru je dána následující rovnicí

$$T_E \frac{dM_H^D}{dt} + M_H^D = \beta_D (\omega_S - \omega_M), \quad (3.74)$$

přičemž jednotlivé veličiny jsou dány vztahy

$$\omega_S = \frac{\beta_D}{k \cdot \phi^0}, \quad \beta_D = \frac{k^2 \phi^0 (\phi^0 + k'_\phi i_R)}{R + k k'_\phi \omega_0}, \quad k'_\phi = \frac{\phi}{i_B + i_R}, \quad (3.75)$$

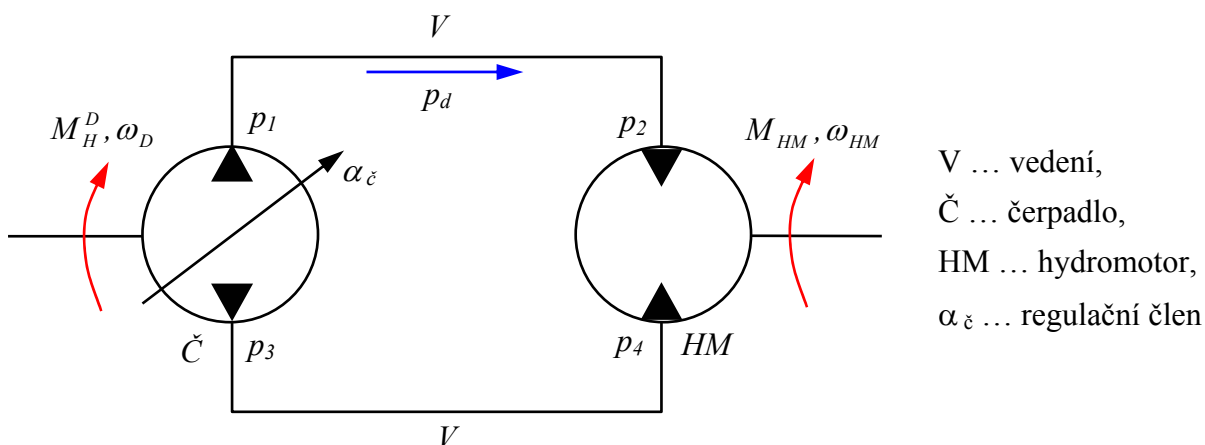
$$T_E = \frac{R T_B + L}{R + k k'_\phi \omega_0}, \quad k = \frac{p N}{2 \pi a},$$

kde : u_R napětí na kotvě,
 i_R proud kotvy,
 i_R^0 proud kotvy v bodě statické rovnováhy,
 R výsledný činný odpor kotvy,
 L výsledná indukčnost kotvy,
 p počet pólových dvojic,
 N počet elektrických závitů kotvy,
 a počet paralelních větví cívky kotvy,

ϕ	magnetický tok vytvářený cívkou buzení,
ϕ^0	magnetický tok vytvářený cívkou buzení v bodě statické rovnováhy,
T_B	konstanta buzení,
i_B	proud cívky buzení,
ω_0	úhlová rychlost v bodě statické rovnováhy.

3.2.3.4. Momentové charakteristiky hydromotoru s objemovou regulací

Kromě elektrických asynchronních a stejnosměrných motorů se v pohonových soustavách uplatňují i hydraulické mechanismy. Energie v hydraulických mechanismech se přenáší převodem mechanické energie z hnacího motoru na hydraulickou energii v čerpadle, hydraulickým vedením od čerpadla k hydromotoru a převodem hydraulické energie v motoru na energii mechanickou, jak je schématicky znázorněno na obr.23.



Obr.23. Schématické znázornění hydraulického převodu – hydromotoru s objemovou regulací.

Vstupním regulačním parametrem hydraulického mechanismu je průtok na výstupu čerpadla $Q_{\check{c}}$, ovládaný polohou regulačního členu $\alpha_{\check{c}}$. Za předpokladu, že výsledné ztráty tlaku v hydraulickém vedení V jsou menší než 10 % nominálních tlaků při maximálních průtocích, můžeme položit

$$p_1 \doteq p_2, \quad p_3 \doteq p_4,$$

pak průtok čerpadla nezávisí od tlakového spádu $p_d = p_1 - p_2$. Zohledníme-li hydraulické ztráty a stlačitelnost tekutiny, lze s ohledem na rovnici (3.69) napsat **dynamickou momentovou charakteristiku** hydromotoru ve tvaru

$$T_h \frac{dM_H^D}{dt} + M_H^D = r Q_{\check{c}} - \beta_D \omega_D, \quad (3.76)$$

přičemž jednotlivé parametry jsou dány vztahy

$$T_h = \frac{V_0}{E \cdot g_{ST}}, \quad r = \frac{k_D}{g_{ST}}, \quad \beta_D = \frac{k_D^2}{g_{ST}}, \quad g_{ST} = \frac{Q_{ST}}{p_d}, \quad (3.77)$$

kde : T_h hydraulická časová konstanta,
 g_{ST} koeficient ztrát netěsnostmi,
 Q_{ST} výsledné objemové ztráty v hydraulických vedeních, čerpadle a motoru,
 V_0 objem vysokotlakého hydraulického vedení včetně dutin čerpadla a motoru,
 E modul objemové pružnosti kapaliny,
 k_D charakteristický objem hydromotoru (viz. rovnice (3.79)),
 β_D tuhost statické charakteristiky motoru.

Položíme-li v rovnici (3.76) $T_h = 0$, obdržíme statickou momentovou charakteristiku hydromotoru s objemovou regulací ve tvaru

$$M_H^S = r Q_C - \beta_D \omega_D, \quad (3.78)$$

z níž pro $M_H^S = 0$ plyne ideální charakteristika hydromotoru

$$r Q_C - \beta_D \omega_D = 0 \Rightarrow \omega_D \equiv \dot{q}_D = \frac{r Q_C}{\beta_D},$$

kteřá po dosazení za r, β_D ze vztahů (3.77) přejde do tvaru

$$\omega_D \equiv \dot{q}_D = \frac{Q_C}{k_D}. \quad (3.79)$$

3.2.3.5. Momentové charakteristiky vznětového spalovacího motoru

Pro analytické vyjádření hnacího momentu vznětového spalovacího motoru uvedeme způsob vyjádření hnacího momentu jako funkci rychlosti ω_M a dodávky paliva na cyklus q . Pro převážnou většinu rychloběžných naftových motorů se tato závislost vyjadřuje na základě experimentálních zkoušek ve tvaru (viz. obr.24)

$$M_M(\omega_M, q) = M'_M(\omega_M) + k_M \cdot \Delta q, \quad \Delta q = q - q_0, \quad (3.80)$$

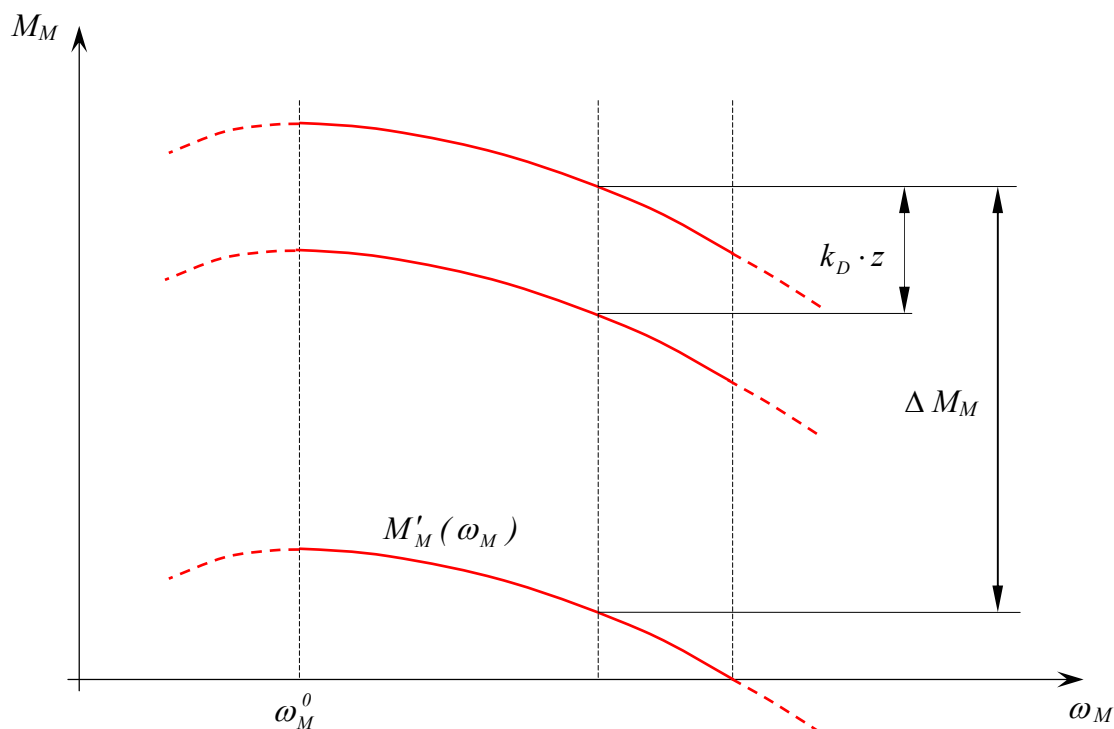
kde : M'_M moment motoru při minimální dodávce paliva q_0 odpovídající volnoběhu,
 k_M konstanta motoru.

V nejčastějších případech růst dodávky paliva prakticky lineárně závisí jen na změně polohy palivové tyče regulátoru. Uvážíme-li, že regulátor snižuje dodávku paliva, lze rovnici (3.80) přepsat do následujícího tvaru

$$M_M(\omega_M, q) = M'_M(\omega_M) + \Delta M_M - k_D z, \quad k_D = \frac{\Delta M}{z_{max}}, \quad (3.81)$$

kde : ΔM_M přírůstek hnacího momentu při maximální dodávce paliva,
 z změna polohy palivové tyče s ohledem na polohu max. dodávky paliva,

z_{max} poloha palivové tyče při volnoběhu,
 k_D konstanta motoru při volnoběhu.



Obr.24. Statické momentové charakteristiky vznětového spalovacího motoru.

Polohu palivové tyče z určíme z pohybové rovnice palivové tyče regulátoru

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + F_p(z) + F_0 = A(z) \cdot \omega_M^2, \quad (3.82)$$

kde : $F_p(z)$ síla pružiny regulátoru redukovaná na hlavní člen regulátoru,

F_0 síla předpětí pružiny regulátoru,

$A(z)$ moment setrvačnosti regulátoru,

m redukovaná hmotnost všech pohyblivých částí regulátoru na hlavní člen regulátoru (zpravidla objímku regulátoru),

b koeficient viskózního tlumení.

Obecně jsou parametry m , $F_p(z)$, $A(z)$ složitými funkcemi polohy palivové tyče regulátoru z a závisí na konkrétním typu regulátoru palivového čerpadla. Při použití regulátoru s přímou regulací je možné vliv setrvačných sil pohybujících se částí regulátoru zanedbat. Koeficient viskózního tlumení b je možné určit pouze experimentálně. Redukovaná tuhost pružiny regulátoru k_R je většinou lineární, potom redukovaná síla pružiny $F_p(z)$ je

$$F_p(z) = k_R \cdot z. \quad (3.83)$$

Síla předpětí pružiny F_0 musí splňovat podmínku

$$F_0 < A(z) \cdot \omega_M^2, \quad (3.84)$$

přičemž hodnota síly předpětí pružiny F_0 se nastavuje v závislosti na momentu setrvačnosti regulátoru $A(z)$, který lze stanovit z empirického vztahu

$$A(z) = n \cdot \frac{G_P}{g} \cdot r_z \cdot \frac{W}{V} \cdot i_P^2, \quad (3.85)$$

kde :

n	počet pístů palivového čerpadla,
G_P	tíhová síla pístu,
g	gravitační zrychlení,
r_z	konstanta regulátoru,
i_P	převodový poměr mezi hřídelem regulátoru a hřídele motoru,
$\frac{W}{V}$	opravný koeficient zohledňující nesouhlasnost směru pohybu pístu a spojky regulátoru.

Při sestavování pohybových rovnic soustavy spalovací motor – regulátor, je nutné zohlednit skutečnost, že poloha palivové tyče z se mění v intervalu daném konstrukcí palivového čerpadla. Potom pohybové rovnice soustavy jsou

$$\begin{aligned} I_M \dot{\omega}_M &= M_M(\omega_M, z) - M_Z, \\ M_M(\omega_M, z) &= M'_M(\omega_M) + \Delta M_M - k_D z, \\ m \ddot{z} + b \dot{z} + F_P(z) + F_0 &= A(z) \omega_M^2, \quad 0 \leq z \leq z_{max}, \end{aligned} \quad (3.86)$$

kde :

I_M	moment setrvačnosti motoru a s ním pevně spojených částí,
M_Z	výsledný moment mechanických a tepelných ztrát v motoru.

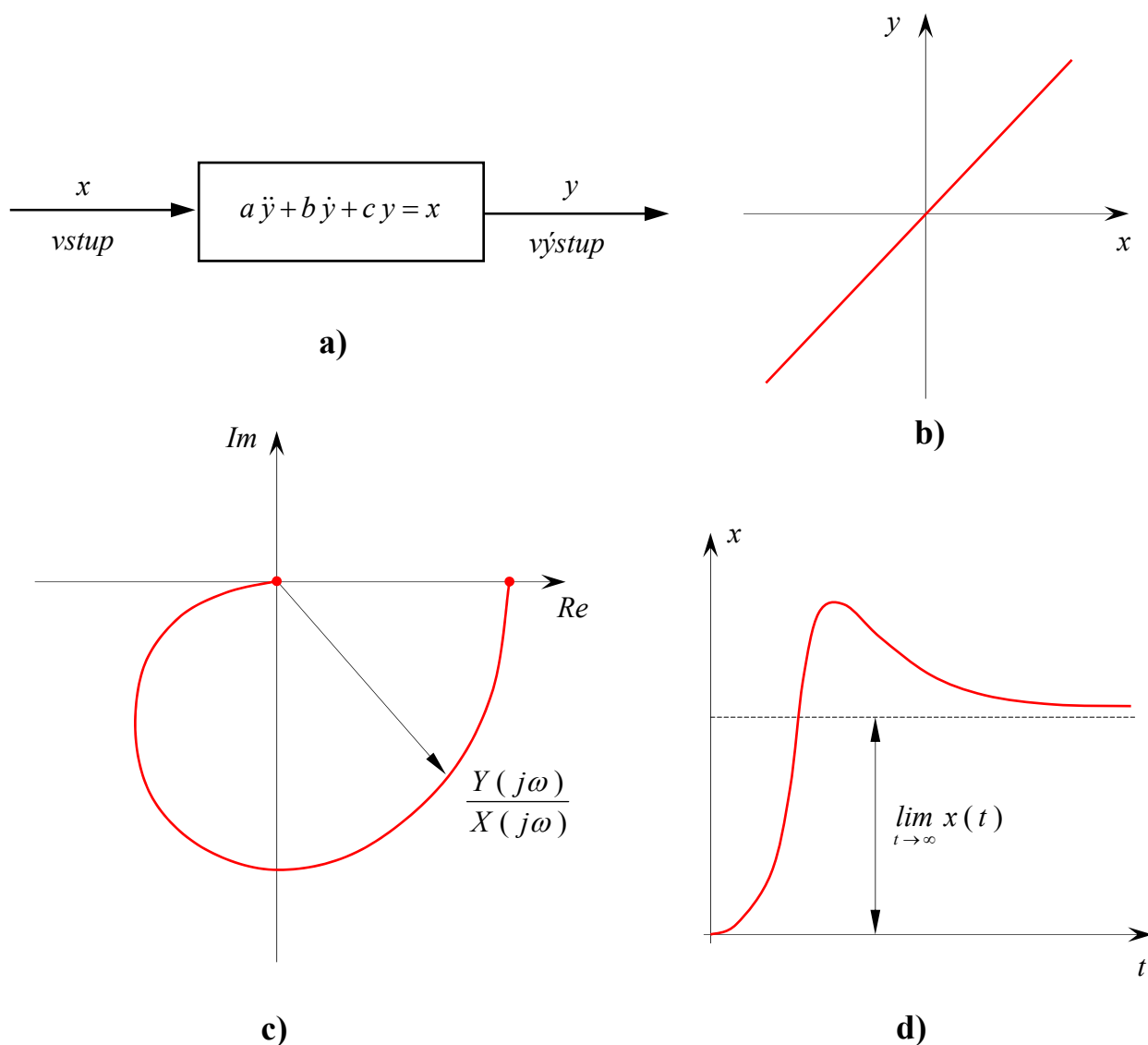
3.3. Nelineární prvky a jejich charakteristiky

Prvky mohou být samy o sobě systémy složené z jednotlivých prvků. Potom jejich vlastnosti popisujeme stejně jako vlastnosti systému, např. diferenciální rovnicí. Někdy však stačí použít k popisu prvku analytického výrazu nebo charakteristiky.^{*)} Protože není možné jednou charakteristikou vyjádřit vlastnosti prvku tak podrobně jako diferenciální rovnicí, používáme různých druhů charakteristik. Tyto charakteristiky mají pak co možná nejjednodušším způsobem vyjadřovat vztahy těch proměnných, které jsou důležité pro analýzu jevů, které vyšetřujeme.

V teorii lineárních dynamických systémů rozdělujeme charakteristiky na statické a dynamické. **Dynamickou charakteristikou** je např. přechodová charakteristika, která udává časový průběh výstupní veličiny při jednotkové skokové změně vstupní veličiny. Frekvenční charakteristika je také dynamickou charakteristikou a udává poměr amplitud výstupní a vstupní veličiny a jejich vzájemný

^{*)} Pod pojmem **charakteristika prvku** rozumíme grafické znázornění závislosti veličin daného prvku.

fázový posun pro různé frekvence při sinusovém vstupním signálu na prvku. Na obr.25b je přechodová a na obr.25c frekvenční charakteristika systému podle obr.25a. Tyto dynamické charakteristiky lineárních dynamických systémů v sobě zahrnují statické vlastnosti, protože statická charakteristika lineárního prvku je vždy přímková, jak je znázorněno na obr.25d. Směrnice této přímky je dána přechodovou charakteristikou pro $t \rightarrow \infty$, popř. frekvenční charakteristikou pro $\omega = 0$.



Obr.25. Lineární prvek a), statická charakteristika prvku b), frekvenční charakteristika prvku c), přechodová charakteristika prvku d).

Statická charakteristika udává hodnoty výstupní veličiny, odpovídající určitým neměním se hodnotám vstupní veličiny. Znázornění vlastností prvků v ustáleném a přechodovém stavu jeho statickou a dynamickou charakteristikou můžeme použít i pro některé nelineární prvky, u kterých lze oddělit od celkové charakteristiky jejich časově závislou složku. Statické charakteristiky mají obvykle na vodorovné ose vstupní veličinu x nelineárního prvku a na svislé ose jeho veličinu výstupní y .

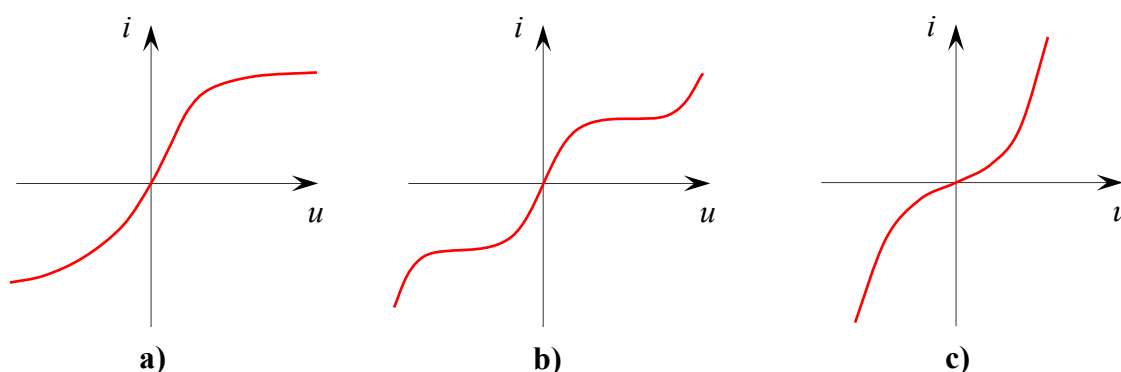
Při tom však jako výstupní nebo vstupní veličinu je možno uvažovat nejrůznější fyzikální veličiny podle toho, jak bude prvek zapojen v soustavě (např. pro elektrické prvky znázorňujeme závislost proudu na napětí nebo obráceně tzv. voltampérovou charakteristikou, která je např. pro lineární odpor přímková).

Abychom usnadnili analýzu dané soustavy, neuvažujeme celou charakteristiku daného prvku, která bývá zpravidla velmi složitá, ale pouze jen její část, tzv. **pracovní oblast charakteristiky**. Pracovním (klidovým) bodem charakteristiky nazýváme bod určený stejnosměrnou složkou vstupní veličiny. Umístění pracovního bodu určuje charakter výstupní veličiny. Při lineární charakteristice nezávisí časový průběh výstupní veličiny na umístění pracovního bodu.

Dosud uvažované charakteristiky udávaly vztahy mezi okamžitými veličinami. Někdy bývá výhodné používat charakteristik, které udávají vztahy jen mezi prvními harmonickými složkami výstupních a vstupních veličin nebo vztahy mezi hodnotami efektivními. Tvar charakteristiky pro efektivní veličiny závisí však na podmínkách, za jakých byla měřena. Těchto charakteristik používáme především při řešení ustálených stavů.

3.3.1. Elektrické prvky

Nelineární odpor. Všechny odpory jsou ve skutečnosti nelineární. Proud, který jimi prochází, způsobí jejich oteplení. Tím vzroste počet volných elektronů, čímž se zvětšuje vodivost. Zvětší se také mřížkové vibrace a redukuje se tím volná dráha elektronu. Tyto účinky mohou způsobit zvětšení nebo zmenšení vodivosti v závislosti na tom, který účinek převažuje. U vodičů vodivost obvykle klesá se zvětšením teploty, zatímco u izolátorů a polovodičů stoupá. U polovodičů většina elektronů je pevně vázána na své atomy i při pokojových teplotách a se zvětšením teploty se může značně zvětšit počet volných elektronů.

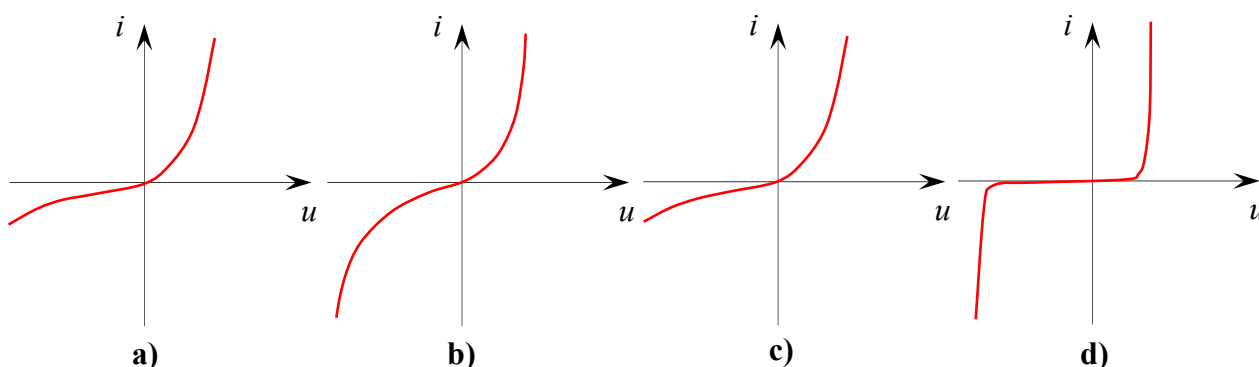


Obr.26. Voltampérové charakteristiky nelineárních odporů.

Vodivost s rostoucí teplotou klesá u žárovek s wolframovým vláknem a ostatních prvků se žhaveným kovovým vláknem. Jejich voltampérová charakteristika je na obr.26a. Podle jejího průběhu lze takových prvků zřejmě použít jako stabilizátory proudu. Lepšího stabilizačního účinku dosahuje

prvek s charakteristikou podle obr.26b, tzv. variátor, který je tvořen železným drátkem (spirálou) umístěným ve skleněné baňce plněné vodíkem. Charakteristika podle obr.26c představuje prvky, jejichž vodivost s teplotou vzrůstá. Příkladem jsou polovodičové odpory, tzv. termistory. Tutéž charakteristiku, tj. charakteristiku podle obr.26c, mají také varistory vyráběné spékáním prášku karbidu křemíku. Používá se jich pro stabilizaci střídavých napětí a k omezení přepětí.

Nesymetrické charakteristiky na obr.27 odpovídají prvkům s usměrňovacím účinkem, způsobeným přechody PN polovodičových prvků. Kuproxidové usměrňovače mají charakteristiku podle obr.27a. Velké zakřivení v okolí počátku dává dobré usměrnění i malých napětí. Charakteristika selenových usměrňovačů na obr.27b ukazuje na výhodné vlastnosti při vyšších napětích. Germaniové usměrňovací hrotové diody s charakteristikou uvedenou na obr.27c, pro usměrňování malých proudů a napětí až do frekvence 100 MHz a plošné germaniové diody pro usměrňování proudů od 0,1 A do stovek ampérů jsou dnes nejběžnějšími usměrňovacími součástkami. Jejich inverzní napětí se pohybují od 30 do 400 V. Křemíkové diody mají inverzní napětí dokonce až do 2000 V při usměrněném proudu 0,5 A do několika set ampérů. Mají voltampérové charakteristiky podobné germaniovým diodám, v závěrném směru mají však podstatně menší vodivost. Jejich hlavní předností je odolnost proti vysokým teplotám až do 150 °C. Charakteristika na obr.27d se vyznačuje náhlou změnou průběhu v závěrném směru. Při disažení tzv. Zenerova napětí dochází k velkému zvětšení vodivosti, takže při malých změnách napětí se proud velmi mění a je nutno jej omezit vnějším odporem. Těchto vlastností se dosahuje u tzv. Zenerových diod odlišnou koncentrací příměsí než u běžných křemíkových usměrňovacích diod.



Obr.27. Voltampérové charakteristiky polovodičových usměrňovačů.

Nelineární kapacita. Permittivita některých dielektrik, např. Seignetovy soli, se mění s velikostí intenzity elektrického pole. Potom je kapacita nelineární funkcí napětí na kondenzátoru. Proud procházející kondenzátorem je dán vztahem

$$i = \frac{d(Cu)}{dt}, \quad (3.87)$$

kde kapacita C je proměnnou veličinou, tzn. je funkcí napětí u , tj. $C = C(u)$. Proto pro časovou derivaci kapacity podle času platí

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt},$$

a proud procházející takovým kondenzátorem je

$$i = \left[C + u \cdot \frac{\partial C}{\partial u} \right] \cdot \frac{du}{dt}. \quad (3.88)$$

Nelineární indukčnost. Permeabilita jader cívek z feromagnetických materiálů se mění s magnetickým polem, a proto je indukčnost takových cívek funkcí proudu. Závislost magnetického toku Φ na proudu cívky i je dána tzv. hysterezní smyčkou podle obr.28. Hysterezní smyčka proměňuje svůj tvar v závislosti na frekvenci, a to tak, že s rostoucí frekvencí se její plocha zvětšuje. Vlivem vířivých proudů se špičky hysterezní smyčky zaoblují. Napětí na nelineární indukčnosti je dáno indukčním zákonem

$$u = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(Li)}{dt}, \quad (3.89)$$

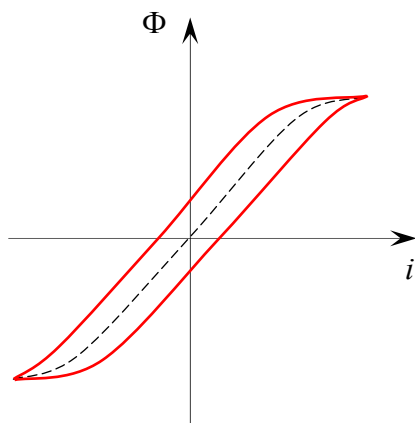
kde L je indukčnost měnící se s velikostí proudu i . Proto pro ni platí

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial i} \cdot \frac{di}{dt},$$

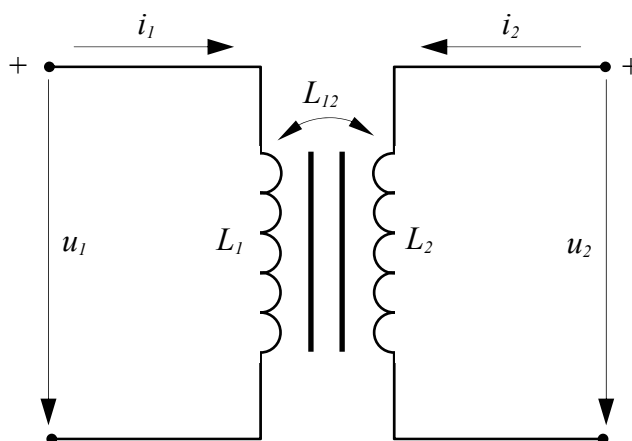
což po dosazení do rovnice pro napětí u , tj. do vztahu (3.89), dává

$$u = i \cdot \frac{dL}{dt} + L \cdot \frac{di}{dt} = \left[L + i \cdot \frac{\partial L}{\partial i} \right] \cdot \frac{di}{dt}, \quad (3.90)$$

přičemž indukčnost L jsou funkce proudu i .



Obr.28. Hysterezní smyčka.



Obr.29. Nelineární vzájemná indukčnost.

Obsahuje-li systém vzájemné indukčnosti, bude záviset permeabilita, a tedy také indukčnosti na všech proudech, takže pro dvě vzájemně vázané indukčnosti podle obr.29 bude platit

$$\begin{aligned}
 \frac{dL_1}{dt} &= \frac{\partial L_1}{\partial i_1} \cdot \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial L_1}{\partial i_2} \cdot \frac{di_2}{dt}, \\
 \frac{dL_{12}}{dt} &= \frac{\partial L_{12}}{\partial i_1} \cdot \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial L_{12}}{\partial i_2} \cdot \frac{di_2}{dt}, \\
 \frac{dL_2}{dt} &= \frac{\partial L_2}{\partial i_1} \cdot \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial L_2}{\partial i_2} \cdot \frac{di_2}{dt}.
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

Pro napětí u_1 a u_2 platí

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial i_1} \cdot \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial i_2} \cdot \frac{di_2}{dt}, \\
 u_2 &= \frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial i_1} \cdot \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial i_2} \cdot \frac{di_2}{dt}.
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

Protože pro magnetické toky Φ_1 a Φ_2 platí podle obr.29

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= L_1 i_1 + L_{12} i_2, \\
 \Phi_2 &= L_2 i_2 + L_{12} i_1,
 \end{aligned}$$

potom můžeme psát

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi_1}{\partial i_1} &= L_1 + i_2 \cdot \frac{\partial L_{12}}{\partial i_1}, \\
 \frac{\partial \Phi_1}{\partial i_2} &= L_{12} + i_1 \cdot \frac{\partial L_{12}}{\partial i_2}, \\
 \frac{\partial \Phi_2}{\partial i_1} &= L_{12} + i_2 \cdot \frac{\partial L_{12}}{\partial i_1}, \\
 \frac{\partial \Phi_2}{\partial i_2} &= L_2 + i_1 \cdot \frac{\partial L_{12}}{\partial i_2}.
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

Dosazením vztahů (3.93) do výrazů pro napětí (3.92) obdržíme

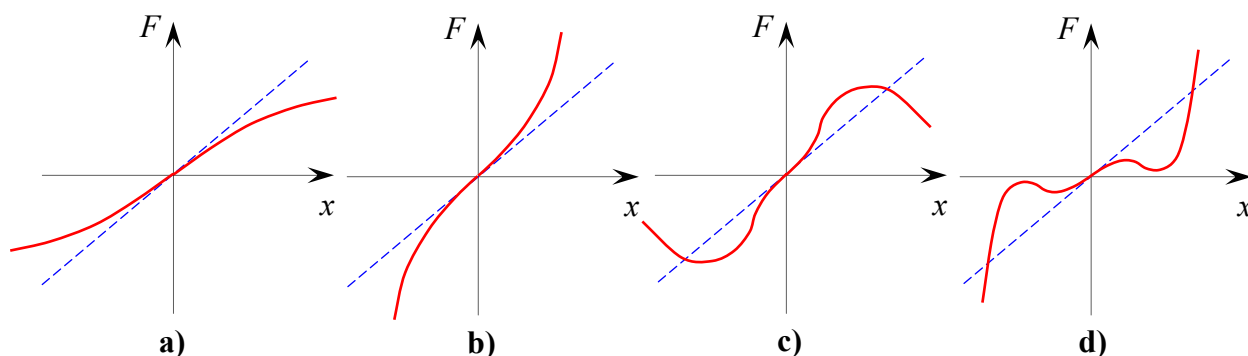
$$\begin{aligned}
 u_1 &= \left[L_1 + i_2 \cdot \frac{\partial L_{12}}{\partial i_1} \right] \cdot \frac{di_1}{dt} + \left[L_{12} + i_1 \cdot \frac{\partial L_{12}}{\partial i_2} \right] \cdot \frac{di_2}{dt}, \\
 u_2 &= \left[L_{12} + i_1 \cdot \frac{\partial L_{12}}{\partial i_1} \right] \cdot \frac{di_1}{dt} + \left[L_2 + i_2 \cdot \frac{\partial L_{12}}{\partial i_2} \right] \cdot \frac{di_2}{dt},
 \end{aligned} \tag{3.94}$$

přičemž indukčnosti L_1 , L_2 a L_{12} jsou funkcemi obou proudů i_1 a i_2 .

3.3.2. Mechanické prvky

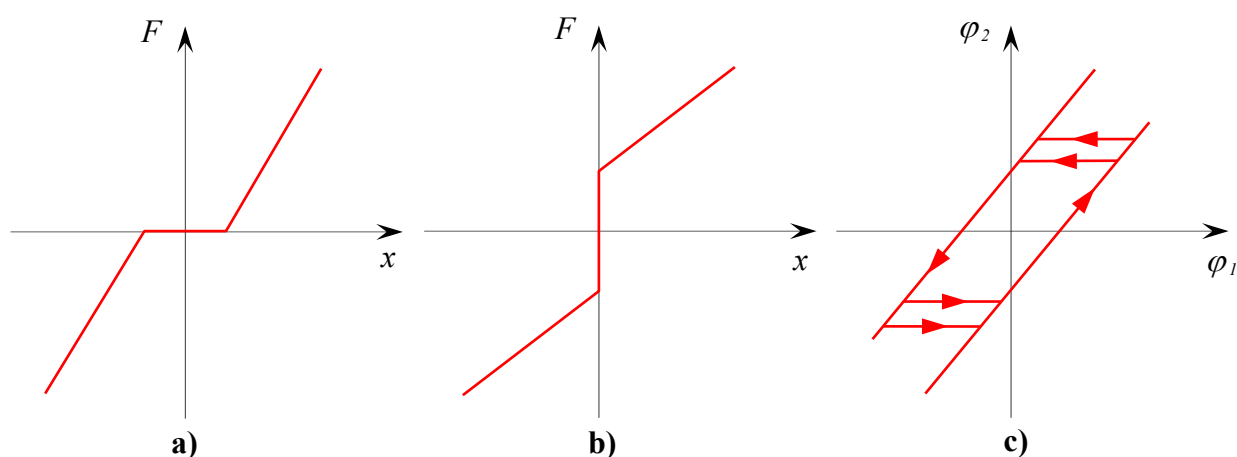
Jako v elektrických dynamických soustavách lze za základní prvky považovat odpory, indukčnosti a kapacity, můžeme za základní prvky mechanických soustav považovat tlumiče, setrvačné hmoty a pružiny.

Nelineární pružiny mají charakteristiky podle obr.30, kde na obr.30a je charakteristika degresivní pružiny (tuhost pružiny s rostoucí výchylkou klesá), na obr.30b je charakteristika progresivní pružiny (tuhost pružiny s rostoucí výchylkou roste), na obr.30c je charakteristika progresivně degresivní pružiny (tuhost pružiny s rostoucí výchylkou nejprve roste a pak klesá) a konečně na obr.30d je charakteristika degresivně progresivní pružiny (tuhost pružiny s rostoucí výchylkou nejprve klesá a potom roste). V mechanických soustavách se uplatňují také nelinearity způsobené často nedokonalým provedením jednotlivých součástí. Takovou nelinearitou je necitlivost (viz. obr.31a), nasycení (viz. obr.30a), nebo předpětí (viz. obr.31b).



Obr.30. Charakteristiky nelineárních pružin : degresivní charakteristika a), progresivní charakteristika b), progresivně degresivní charakteristika c), degresivně progresivní charakteristika d).

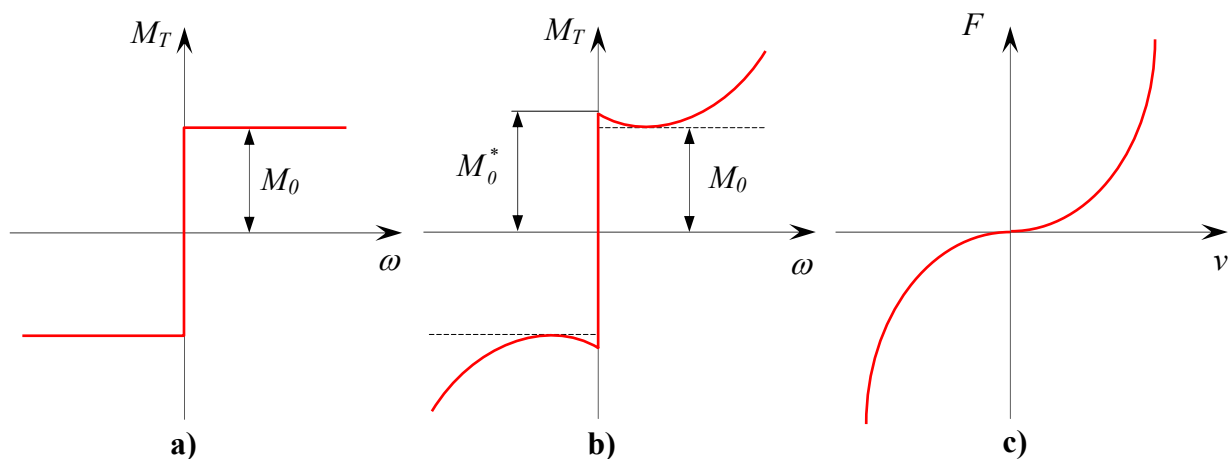
Nelinearita typu necitlivosti bývá způsobena vůlí v převodových mechanismech, překrytím v pneumatických nebo hydraulických rozvodech nebo také suchým třením. Mechanické soustavy nebo prvky mají také hysterezi, která bývá způsobena např. vůlí v převodech. Pro mechanické součásti, u nichž lze zanedbat moment setrvačnosti na výstupním hřídeli z převodů vzhledem k suchému třením, lze jejich hysterezi znázornit charakteristikou podle obr.31c.



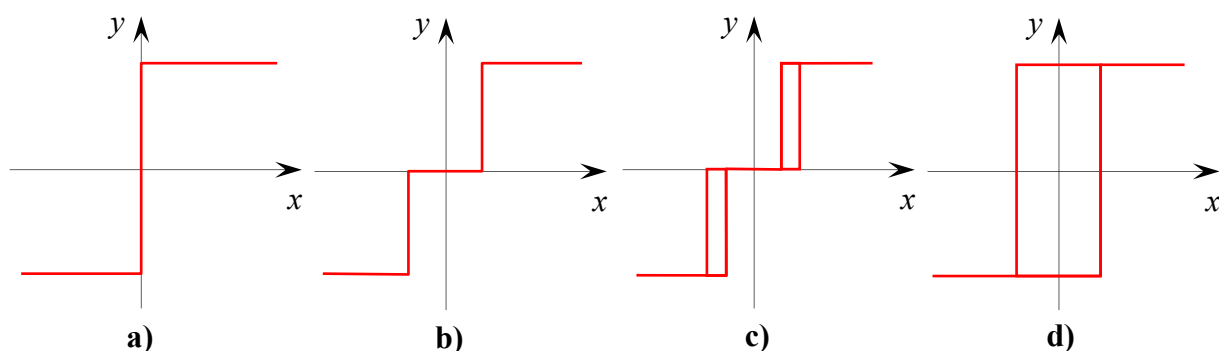
Obr.31. Charakteristika prvku s pásmem necitlivosti a), charakteristika prvku s předpětím b), charakteristika vůle v převodech c).

Na vodorovnou osu vynášíme úhlovou výchylku φ_1 vstupního hřídele a na svislou osu úhlovou výchylku φ_2 výstupního hřídele převodů. Šikmé větve odpovídají přímému záběru výstupu se vstupem, vodorovné úsečky průchodu vůlí při reverzaci chodu. Tato charakteristika vychází z dříve uvedeného předpokladu o zanedbatelném momentu setrvačnosti, což znamená, že výstupní hřídel z převodů se okamžitě zastaví, ustane-li přímý záběr.

Nelineární tlumení bývá často způsobováno třením, které je další typickou nelinearitou mechanických soustav. Suché tření je představováno tzv. Coulombovým ideálním suchým třením podle obr.32a. Na vodorovnou osu se vynáší rychlost pohybu (např. úhlová rychlost hřídele) a na svislou osu síla nebo moment tření M_T . Skutečná charakteristika tření (viz. obr.32b) je dána kombinací suchého tření a tzv. viskózního tření, úměrného úhlové rychlosti ω . Obsahuje však ještě tzv. klidové tření M_0^* , které je třeba překonat při rozběhu. Při malých rychlostech moment tření zpočátku trochu klesá, pak se však zvětšuje vlivem viskózního tření. Tlumení v tekutině je při větších rychlostech přibližně úměrné druhé mocnině rychlosti a má charakteristiku podle obr.32c.



Obr.32. Charakteristika Coulombova suchého tření a), charakteristika skutečného tření b), charakteristika tlumení v tekutině c).



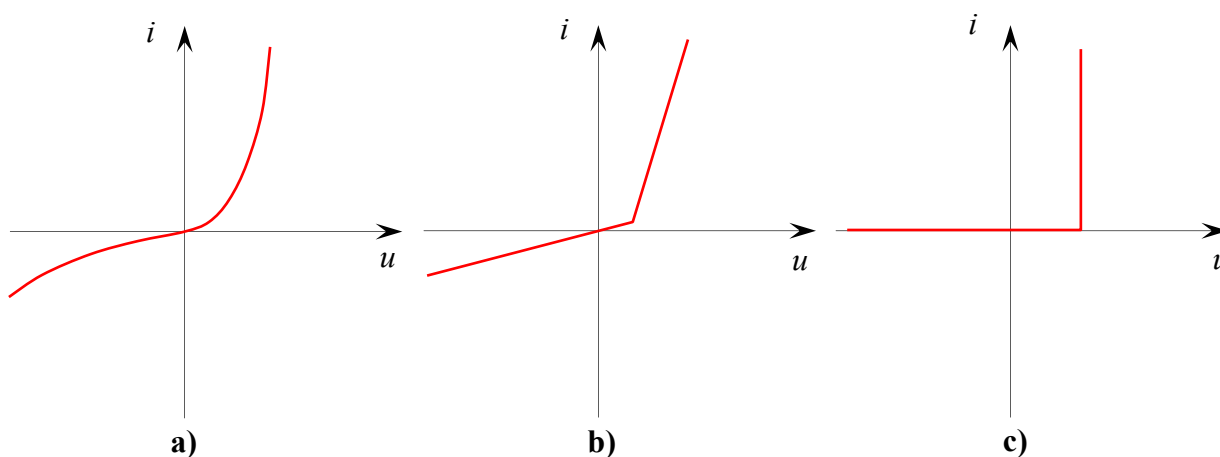
Obr.33. Charakteristiky reléových prvků : ideální relé a), relé s pásmem necitlivosti b), relé s hystezí c), relé při působení suchého tření nebo vůle d).

Zvláštní skupinu nelineárních charakteristik elektrických i mechanických prvků tvoří reléové charakteristiky podle obr.33. Takovéto charakteristiky mají prvky, jejichž výstupní veličina se mění skokem (nespojité) při spojitě změně vstupní veličiny. Příkladem je relé. Obrázek 33a představuje charakteristiku ideálního relé, obr.33b relé s pásmem necitlivosti, obr.33c relé s hysterezí (proud odpadu kotvy je menší než proud přitahu). Na obr.33d je charakteristika reléového prvku při působení suchého tření nebo vůle.

3.3.3. Aproximace nelineárních charakteristik

Abychom mohli analyzovat dynamické vlastnosti pohonových soustav matematicky, je třeba, aby charakteristiky jejich prvků byly vyjádřeny analytickými výrazy. Vystihnout matematicky charakteristiky nelineárních prvků bývá velmi obtížné. Proto se je snažíme vyjádřit alespoň přibližnými matematickými vztahy, tzv. aproximací. Tato aproximace má být dostatečně jednoduchá i dostatečně přesně vyjadřovat skutečnou charakteristiku. Vzhledem k tomu, že charakteristiky prvků se obvykle zjišťují experimentálně a vyjadřují tedy již samy dost nepřesně skutečné vlastnosti prvku, nemá obvykle smysl hledat nějakou obzvláště přesnou aproximaci. Aproximace můžeme rozdělit na aproximace přímkovými úseky a aproximace analytickými výrazy.

Nejjednodušší aproximací je náhrada nelineární charakteristiky jedinou přímkou. Ta však nedovoluje určit kvalitativně odlišné jevy v nelineárních pohonových soustavách. Tyto jevy lze určit jen aproximací několika přímkovými úseky. Tak např. charakteristiku diody podle obr.34a můžeme nahradit dvěma přímkovými úseky podle obr.34b.



Obr.34. Aproximace charakteristiky diody přímkovými úseky.

Aproximační charakteristika, i když jednoduše dána přímkami, zachová vcelku nelineární charakter daného prvku. Takováto charakteristika, skládající se z přímkových úseků, je ve skutečnosti “nelineárnější” než charakteristika původní. Její analytické vyjádření je totiž dáno nekonečnou řadou, kdežto původní charakteristika může být analyticky vyjádřena mnohočlenem konečného stupně. Použití aproximací přímkovými úseky dává mnohdy nejen kvalitativně, ale i kvantitativně dobré

výsledky. Jestliže je třeba stanovit charakter nelineárního pochodu, používáme ještě jednodušší aproximace podle obr.34c.

Charakteristiky daných nelineárních prvků jsou zobrazením funkce

$$y = f(x), \quad (3.95)$$

kde nezávisle proměnná x je vstupní veličinou a závislé proměnná y výstupní veličinou daného nelineárního prvku. Je-li funkce $f(x)$ jednoznačná a spojitá a má-li také spojitě derivace, můžeme charakteristiku v okolí počátku (není-li pracovní bod v počátku, pak ho lze vhodnou transformací do počátku převést) analyticky vyjádřit MacLaurinovou řadou

$$y = f(0) + \left[\frac{df(x)}{dx} \right]_0 \cdot x + \left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right]_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots + \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_0 \cdot \frac{x^k}{k!} + \dots, \quad (3.96)$$

proto nejčastěji používanou aproximační funkcí je mnohočlen

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots + a_n x^n, \quad (3.97)$$

jehož jednotlivé součinitele a_0 až a_n odpovídají konstantám řady (3.96). Čím je stupeň mnohočlenu vyšší, tím je aproximace lepší. Nesmí však být příliš vysoký, neboť potom by se s takovou funkcí nedalo snadno pracovat. Tak například : lineární aproximace $y = a_0 + a_1 x$ vyhovuje jen pro malé oblasti charakteristiky v okolí pracovního bodu. Kvadratická aproximace (aproximace mnohočlenem druhého stupně) $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ se používá k vyjádření počátečních úseků charakteristik diod, triod apod. a konečně kubická aproximace (aproximace mnohočlenem třetího stupně) $y = a_0 + a_1 x \pm a_3 x^3$ se nejčastěji používá k analytickému vyjádření symetrických charakteristik mechanických i elektrických prvků. Aproximace mnohočlenem vyššího stupně (tj. pro $n > 3$) vyžaduje dosti složité výpočty. Pro kvalitativní vyšetřování nelineárních jevů je velmi často výhodné rozdělit danou funkci na sudou a lichou. Z dané charakteristiky je můžeme graficky vyjádřit podle této úvahy. V dané funkci, aproximované např. mnohočlenem pátého stupně

$$y = f(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5, \quad (3.98)$$

je její sudá část

$$f_s(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad (3.99)$$

a lichá část

$$f_L(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 = \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \quad (3.100)$$

Podle pravých stran těchto rovnic lze snadno sestavit $f_s(x)$ a $f_L(x)$. Platí

$$f_s(x) + f_L(x) = \frac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = f(x). \quad (3.101)$$

Kromě mnohočlenů (3.97) lze ovšem použít k modelování charakteristik prvků i jiných analytických výrazů. Tak např. charakteristiku diody uvedenou na obr.34a můžeme aproximovat pomocí následujícího vztahu

$$y = K \cdot (e^{\beta x} - 1), \quad K, \beta = \text{konst.}, \quad (3.102)$$

nebo charakteristiku triody lze aproximovat funkcí

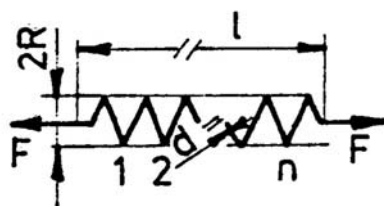
$$y = K \cdot e^{\beta x}, \quad K, \beta = \text{konst.} \quad (3.103)$$

Existuje ještě mnoho jiných aproximací nelineárních charakteristik, se kterými se lze seznámit ve specializované literatuře, přičemž pro nejčastěji se vyskytující tlumící a tuhostní prvky v oboru pohonových soustav jsou aproximace příslušných charakteristik uvedeny v následujícím článku.

3.3.4. Charakteristiky pružných a tlumících vazeb

Jak již bylo řečeno, pro analýzu dynamických vlastností pohonových soustav je nutné, aby charakteristiky jejich prvků byly vyjádřeny analytickými výrazy. Vzhledem k tomu, že charakteristiky prvků se obvykle, zejména u silně nelineárních prvků, zjišťují experimentálně, uvedeme si dále aproximace charakteristik nejčastěji se vyskytujících prvků pohonových soustav.

➤ Šroubová kroucená pružina – tah

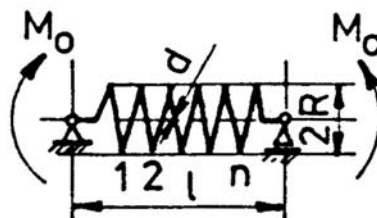


tuhost pružiny v tahu :

$$k_N = \frac{G d^4}{64 n R^3}, \quad \text{platí pokud } l \gg R,$$

kde G je modul pružnosti ve smyku, d je průměr drátu pružiny, n je počet závitů pružiny, R je střední průměr pružiny.

➤ Šroubová kroucená pružina – ohyb

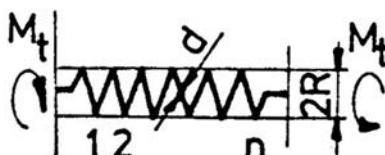


ohybová tuhost pružiny :

$$k_O = \frac{E d^4}{32 n R} \frac{G}{E + 2 G},$$

kde E je modul pružnosti v tahu, G je modul pružnosti ve smyku, d je průměr drátu pružiny, n je počet závitů pružiny, R je střední průměr pružiny.

➤ **Šroubová kroucená pružina – torze**

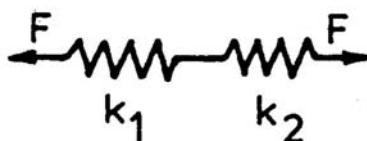


tuhost pružiny v torzi :

$$k_T = \frac{E d^4}{64 n R},$$

kde E je modul pružnosti v tahu, d je průměr drátu pružiny, n je počet závitů pružiny, R je střední průměr pružiny.

➤ **Sériově řazené dvě pružiny**



výsledná tuhost soustavy :

$$\frac{l}{k} = \frac{l}{k_1} + \frac{l}{k_2} \Rightarrow k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2},$$

kde k_1 , k_2 jsou tuhosti jednotlivých sériově řazených pružin. Tak např. pro výslednou tuhost v tahu, resp. ohybu, resp. torzi platí

$$k_N = \frac{k_{N1} k_{N2}}{k_{N1} + k_{N2}} = \frac{\frac{G_1 d_1^4}{64 n_1 R_1^3} \frac{G_2 d_2^4}{64 n_2 R_2^3}}{\frac{G_1 d_1^4}{64 n_1 R_1^3} + \frac{G_2 d_2^4}{64 n_2 R_2^3}}, \quad \text{pokud } l_1 \gg R_1, l_2 \gg R_2,$$

resp.

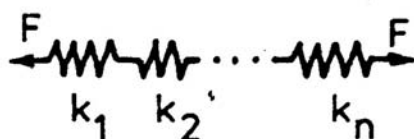
$$k_O = \frac{k_{O1} k_{O2}}{k_{O1} + k_{O2}} = \frac{\frac{E_1 d_1^4}{32 n_1 R_1} \frac{G_1}{E_1 + 2 G_1} \frac{E_2 d_2^4}{32 n_2 R_2} \frac{G_2}{E_2 + 2 G_2}}{\frac{E_1 d_1^4}{32 n_1 R_1} \frac{G_1}{E_1 + 2 G_1} + \frac{E_2 d_2^4}{32 n_2 R_2} \frac{G_2}{E_2 + 2 G_2}},$$

resp.

$$k_T = \frac{k_{T1} k_{T2}}{k_{T1} + k_{T2}} = \frac{\frac{E_1 d_1^4}{64 n_1 R_1} \frac{E_2 d_2^4}{64 n_2 R_2}}{\frac{E_1 d_1^4}{64 n_1 R_1} + \frac{E_2 d_2^4}{64 n_2 R_2}},$$

přičemž význam jednotlivých veličin je stejný jako v případech osamělých pružin.

➤ **Sériově řazených n pružin**



výsledná tuhost soustavy :

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} \Rightarrow k = \frac{\prod_{j=1}^n k_j}{\sum_{i=1}^n \left[\prod_{j=1, j \neq i}^n k_j \right]},$$

kde k_1, k_2, \dots, k_n jsou tuhosti jednotlivých sériově řazených pružin. Tak např. pro výslednou tuhost v tahu, resp. ohybu, resp. torzi platí

$$k_N = \frac{\prod_{j=1}^n k_{Nj}}{\sum_{i=1}^n \left[\prod_{j=1, j \neq i}^n k_{Nj} \right]} = \frac{\prod_{j=1}^n \frac{G_j d_j^4}{64 n_j R_j^3}}{\sum_{i=1}^n \left[\prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{G_j d_j^4}{64 n_j R_j^3} \right]}, \quad \text{pokud } l_j \gg R_j,$$

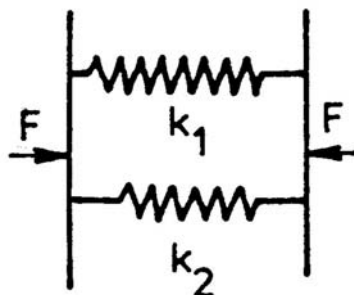
resp.

$$k_O = \frac{\prod_{j=1}^n k_{Oj}}{\sum_{i=1}^n \left[\prod_{j=1, j \neq i}^n k_{Oj} \right]} = \frac{\prod_{j=1}^n \frac{E_j d_j^4}{32 n_j R_j} \frac{G_j}{E_j + 2 G_j}}{\sum_{i=1}^n \left[\prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{E_j d_j^4}{32 n_j R_j} \frac{G_j}{E_j + 2 G_j} \right]},$$

resp.

$$k_T = \frac{\prod_{j=1}^n k_{Tj}}{\sum_{i=1}^n \left[\prod_{j=1, j \neq i}^n k_{Tj} \right]} = \frac{\prod_{j=1}^n \frac{E_j d_j^4}{64 n_j R_j}}{\sum_{i=1}^n \left[\prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{E_j d_j^4}{64 n_j R_j} \right]}.$$

➤ **Paralelně řazené dvě pružiny**



výsledná tuhost soustavy :

$$k = k_1 + k_2,$$

kde k_1 , k_2 jsou tuhosti jednotlivých paralelně řazených pružin. Tak pro výslednou tuhost v tahu, resp. ohybu, resp. torzi platí

$$k_N = k_{N1} + k_{N2} = \frac{G_1 d_1^4}{64 n_1 R_1^3} + \frac{G_2 d_2^4}{64 n_2 R_2^3}, \quad \text{pokud} \quad l_1 \gg R_1, l_2 \gg R_2,$$

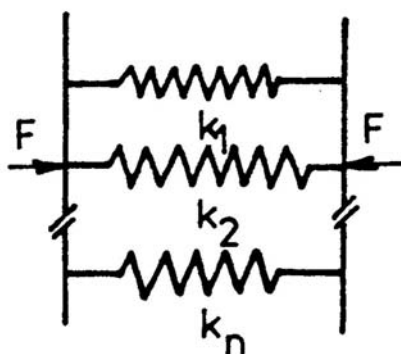
resp.

$$k_O = k_{O1} + k_{O2} = \frac{E_1 d_1^4}{32 n_1 R_1} \frac{G_1}{E_1 + 2 G_1} + \frac{E_2 d_2^4}{32 n_2 R_2} \frac{G_2}{E_2 + 2 G_2},$$

resp.

$$k_T = k_{T1} + k_{T2} = \frac{E_1 d_1^4}{64 n_1 R_1} + \frac{E_2 d_2^4}{64 n_2 R_2}.$$

➤ **Paralelně řazených n pružin**



výsledná tuhost soustavy :

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_n = \sum_{j=1}^n k_j$$

kde k_1 , k_2 , ..., k_n jsou tuhosti jednotlivých paralelně řazených pružin.

Tak např. pro výslednou tuhost v tahu, resp. ohybu, resp. torzi platí

$$k_N = \sum_{j=1}^n k_{Nj} = \sum_{j=1}^n \frac{G_j d_j^4}{64 n_j R_j^3}, \quad \text{pokud } l_j \gg R_j,$$

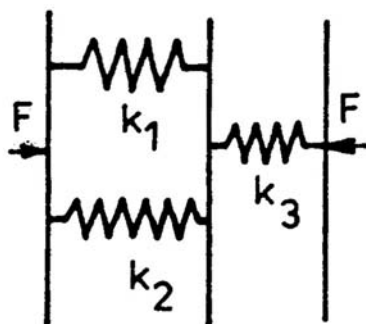
resp.

$$k_O = \sum_{j=1}^n k_{Oj} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j d_j^4}{32 n_j R_j} \frac{G_j}{E_j + 2 G_j},$$

resp.

$$k_T = \sum_{j=1}^n k_{Tj} = \sum_{j=1}^n \frac{E_j d_j^4}{64 n_j R_j}.$$

➤ **Kombinované řazení pružin**

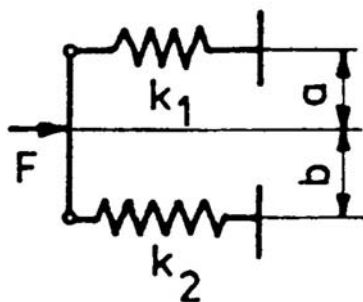


výsledná tuhost soustavy :

$$k = \frac{k_1 k_3 + k_2 k_3}{k_1 + k_2 + k_3}$$

kde k_1 , k_2 , k_3 jsou tuhosti jednotlivých pružin, přičemž pružiny 1 a 2 jsou řazeny paralelně a s nimi do série je zařazena pružina 3.

➤ **Nesymetrické uložení na dvou pružinách**

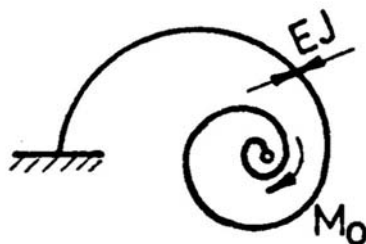


výsledná tuhost soustavy :

$$k = \frac{k_1 k_2 (a+b)^2}{k_1 a^2 + k_2 b^2},$$

kde k_1 , k_2 jsou tuhosti jednotlivých pružin, přičemž se zřejmě jedná o paralelní řazení dvou pružin vedle sebe.

➤ **Spirálová pružina ohýbaná – vetknutý konec**



tuhost ohýbané spirálové pružiny s vetknutým koncem :

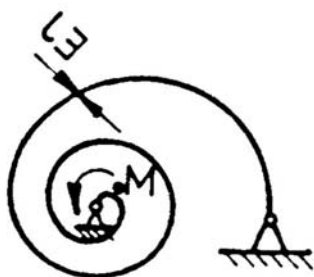
$$k = \frac{EJ}{l},$$

kde E je modul pružnosti v tahu, J je kvadratický moment k neutrální ose a l je délka spirálové pružiny. Tak např. pro kruhový průřez platí

$$k = \frac{EJ}{l} = \frac{5\pi}{64} \frac{Ed^4}{l},$$

kde d je průměr kruhové průřezu.

➤ **Spirálová pružina ohýbaná – kloubový konec**

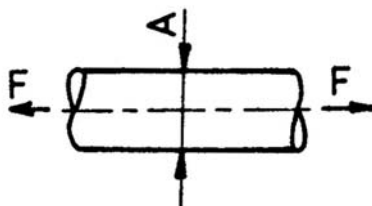


tuhost ohýbané spirálové pružiny s kloubovým koncem :

$$k = 0,8 \frac{EJ}{l},$$

kde E je modul pružnosti v tahu, J je kvadratický moment k neutrální ose a l je délka spirálové pružiny.

➤ **Prizmatická tyč – tah**



tuhost prizmatické tyče v tahu :

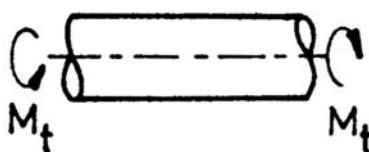
$$k = \frac{E A}{l},$$

kde E je modul pružnosti v tahu, A je plocha příčného průřezu prizmatické tyče a l je délka prizmatické tyče. Tak např. pro kruhový, resp. obdélníkový příčný průřez prizmatické tyče platí

$$k = \frac{\pi E d^2}{4 l}, \quad \text{resp.} \quad k = \frac{E a b}{l},$$

kde d je průměr kruhového příčného průřezu a a , b jsou délky stran obdélníkového příčného průřezu.

➤ **Prizmatická tyč – torze**



tuhost prizmatické tyče v torzi (krutu) :

$$k = \frac{G J_P}{l}$$

kde G je modul pružnosti ve smyku, J_P je polární kvadratický moment příčného průřezu prizmatické tyče a l je délka prizmatické tyče. Tak např. pro kruhový, resp. obdélníkový příčný průřez prizmatické tyče platí

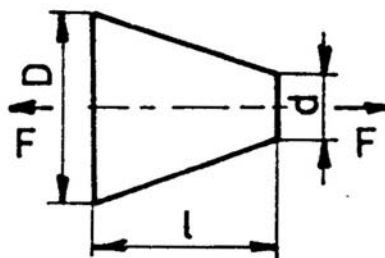
$$k = \frac{5 \pi G d^4}{32 l} \doteq 0,49 l \frac{G d^4}{l},$$

resp.

$$k = \frac{1}{3} \frac{G a b (a^2 + b^2)}{l},$$

kde d je průměr kruhového příčného průřezu a a , b jsou délky stran obdélníkového příčného průřezu.

➤ **Kuželová tyč – tah**

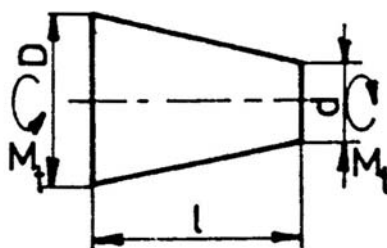


tuhost kuželové tyče v tahu :

$$k = \frac{\pi}{4} \frac{E D d}{l} \doteq 0,7854 \frac{E D d}{l},$$

kde E je modul pružnosti v tahu a l je délka kuželové tyče.

➤ **Kuželová tyč – torze**

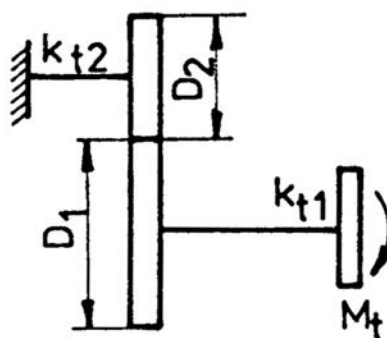


tuhost kuželové tyče v torzi (krutu) :

$$k = \frac{3\pi}{32} \frac{G d^4}{l \xi (1 + \xi + \xi^2)}, \quad \xi = \frac{d}{D}$$

kde G je modul pružnosti ve smyku a l je délka kuželové tyče.

➤ **Torzní hřídele s převodem**

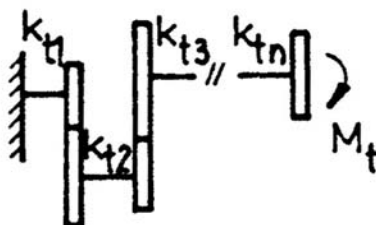


výsledná tuhost soustavy :

$$k = \frac{k_{t1} k_{t2}}{k_{t1} + k_{t2} n^2},$$

kde k_{t1} , k_{t2} jsou torzní tuhosti hřídelů 1 a 2, n je převodový poměr mezi koly 1 a 2.

➤ **Soustava torzních hřídelů s převody**

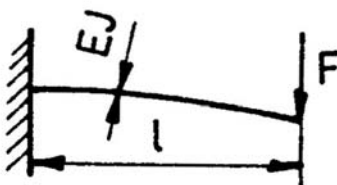


výsledná tuhost soustavy :

$$\frac{1}{k} = \frac{n_1^2}{k_{t1}} + \frac{n_2^2}{k_{t2}} + \dots + \frac{n_n^2}{k_{tn}} \Rightarrow k = \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{n_j^2}{k_{tj}} \right\}^{-1}, \quad n_1 = 1,$$

kde k_{t1} , k_{t2} , ..., k_{tn} jsou torzní tuhosti hřídelů 1, 2, ..., n a n_j je převodový poměr mezi koly $j-1$ a j .

➤ **Nosník jednostranně vetknutý zatížený na konci**



tuhost jednostranně vetknutého nosníku :

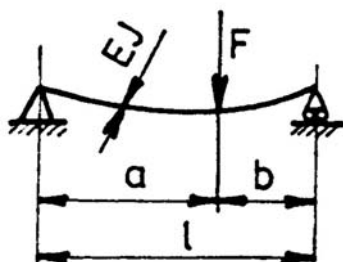
$$k = \frac{3EJ}{l^3},$$

kde E je modul pružnosti v tahu, J je kvadratický moment k neutrální ose a l je délka nosníku. Tak např. pro nosník s kruhovým, resp. čtvercovým příčným průřezem pro konstantu tuhosti platí

$$k = \frac{15\pi}{64} \frac{E d^4}{l^3}, \quad \text{resp.} \quad k = \frac{E a^4}{l^3}$$

kde d je průměr kruhového příčného průřezu a kde a je délka strany čtvercového příčného průřezu nosníku.

➤ **Nosník oboustranně prostě podepřený zatížený osamělou silou**



tuhost jednostranně vetknutého nosníku :

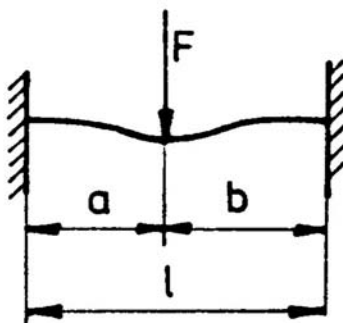
$$k = \frac{3EJl}{a^2 b^2},$$

kde E je modul pružnosti v tahu, J je kvadratický moment k neutrální ose a l je délka nosníku. Tak např. pro nosník s kruhovým, resp. čtvercovým příčným průřezem pro konstantu tuhosti platí

$$k = \frac{15\pi}{64} \frac{E d^4}{l^3}, \quad \text{resp.} \quad k = \frac{E c^4 l}{a^2 b^2}$$

kde d je průměr kruhového příčného průřezu a kde c je délka strany čtvercového příčného průřezu nosníku.

➤ **Nosník oboustranně vetknutý zatížený osamělou silou**



tuhost jednostranně vetknutého nosníku :

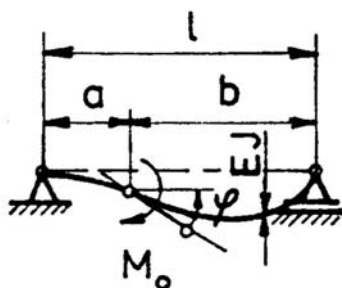
$$k = \frac{3EJl^3}{a^3 b^3},$$

kde E je modul pružnosti v tahu, J je kvadratický moment k neutrální ose a l je délka nosníku. Tak např. pro nosník s kruhovým, resp. čtvercovým příčným průřezem platí

$$k = \frac{15\pi}{64} \frac{E d^4 l^3}{a^3 b^3}, \quad \text{resp.} \quad k = \frac{E c^4 l^3}{a^3 b^3}$$

kde d je průměr kruhového příčného průřezu a kde c je délka strany čtvercového příčného průřezu nosníku.

➤ **Nosník oboustranně prostě podepřený zatížený momentem**



tuhost jednostranně vetknutého nosníku :

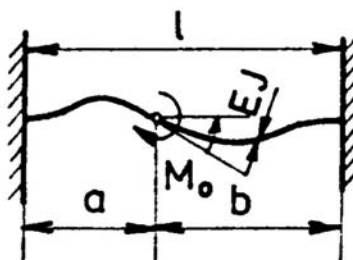
$$k = \frac{3 E J l}{3 a^2 + b l - 2 a l},$$

kde E je modul pružnosti v tahu, J je kvadratický moment k neutrální ose a l je délka nosníku. Tak např. pro nosník s kruhovým, resp. čtvercovým příčným průřezem pro konstantu tuhosti platí

$$k = \frac{15 \pi}{64} \frac{E d^4 l}{3 a^2 + b l - 2 a l}, \quad \text{resp.} \quad k = \frac{E c^4 l}{3 a^2 + b l - 2 a l}$$

kde d je průměr kruhového příčného průřezu a kde c je délka strany čtvercového příčného průřezu nosníku.

➤ **Nosník oboustranně vetknutý zatížený momentem**



tuhost jednostranně vetknutého nosníku :

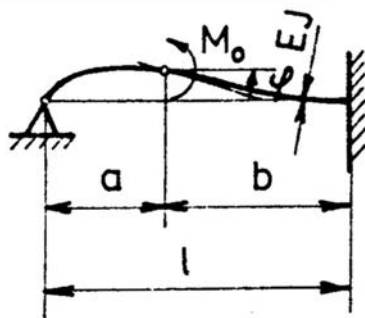
$$k = \frac{E J l^3}{a (l^3 - 4 a l^2 + 6 l a^2 - 3 a^3)},$$

kde E je modul pružnosti v tahu, J je kvadratický moment k neutrální ose a l je délka nosníku. Tak např. pro nosník s kruhovým, resp. čtvercovým příčným průřezem platí

$$k = \frac{5 \pi}{64} \frac{E d^4 l^3}{a (l^3 - 4 a l^2 + 6 l a^2 - 3 a^3)}, \quad \text{resp.} \quad k = \frac{l}{3 a} \frac{E c^4 l^3}{(l^3 - 4 a l^2 + 6 l a^2 - 3 a^3)}$$

kde d je průměr kruhového příčného průřezu a kde c je délka strany čtvercového příčného průřezu nosníku.

➤ **Nosník na jedné straně podepřený na druhé vetknutý zatížený momentem**



tuhost jednostranně vetknutého nosníku :

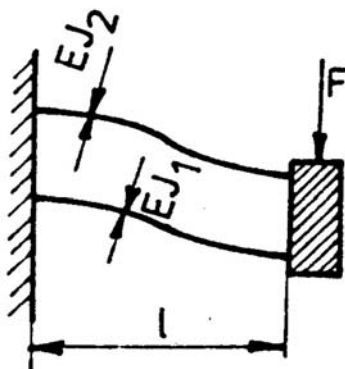
$$k = \frac{4 E J l^3}{4 b l^3 - 3 (2 a + b)^2 b^2},$$

kde E je modul pružnosti v tahu, J je kvadratický moment k neutrální ose a l je délka nosníku. Tak např. pro nosník s kruhovým, resp. čtvercovým příčným průřezem pro konstantu tuhosti platí

$$k = \frac{5 \pi}{16} \frac{E d^4 l^3}{4 b l^3 - 3 (2 a + b)^2 b^2}, \quad \text{resp.} \quad k = \frac{4}{3} \frac{E c^4 l^3}{4 b l^3 - 3 (2 a + b)^2 b^2}$$

kde d je průměr kruhového příčného průřezu a kde c je délka strany čtvercového příčného průřezu nosníku

➤ **Paralelní řazení dvou vetknutých nosníků**

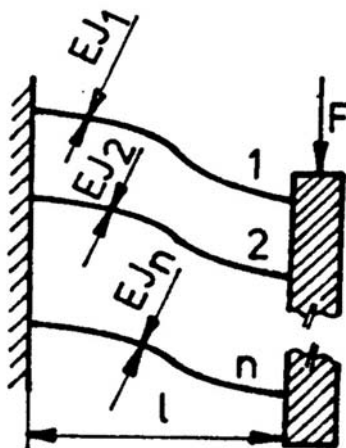


tuhost jednostranně vetknutého nosníku :

$$k = \frac{12 E (J_1 + J_2)}{l^3},$$

kde E je modul pružnosti v tahu, J_1 je kvadratický moment nosníku 1 k neutrální ose, J_2 je kvadratický moment nosníku 2 k neutrální ose a l je délka nosníků.

➤ **Paralelní řazení n vetknutých nosníků**

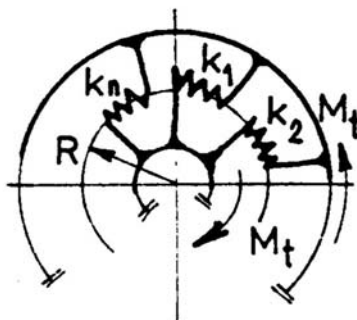


tuhost jednostranně vetknutého nosníku :

$$k = \frac{12 E (J_1 + J_2 + \dots + J_n)}{l^3} = \frac{12 E}{l^3} \sum_{j=1}^n J_j ,$$

kde E je modul pružnosti v tahu, J_j je kvadratický moment j -tého nosníku k neutrální ose a l je délka nosníků.

➤ **Spojka s n -pružinami uspořádanými po obvodě**



tuhost jednostranně vetknutého nosníku :

$$k = k_1 R^2 + k_2 R^2 + \dots + k_n R^2 = R^2 \sum_{j=1}^n k_j ,$$

kde R je poloměr obvodu kružnice, na které jsou uspořádány jednotlivé pružiny a kde k_j je tuhost j -té pružiny.

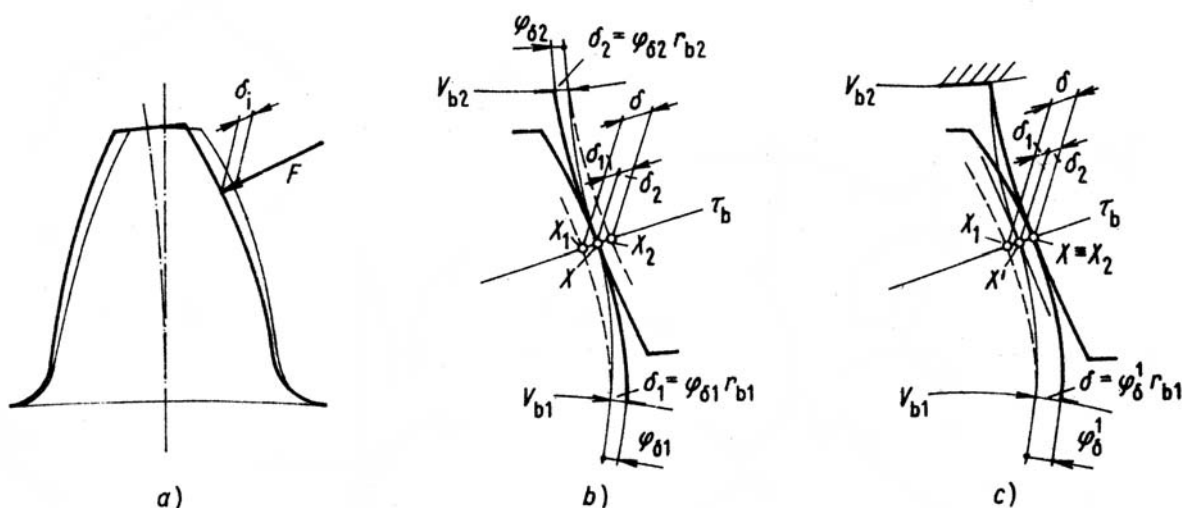
➤ **Tuhost čelního soukolí s evolventním ozubením**

Zuby ozubených kol se účinkem zatížení deformují, což bývá příčinou řady negativních, ale i pozitivních důsledků. Proto je znalost deformačních vlastností ozubení velmi důležitá, zejména pak při analýzách dynamických vlastností pohonových soustav, protože pár ozubených kol představuje tuhostní prvek s konečnou hodnotou tuhosti a proto je třeba s tuhostí ozubení počítat. Tuhost ozubení je kvantitativním vyjádřením deformace zubů a je definována jako poměr zatížení (délkového nebo šířkového) k deformaci.

Vzhledem ke složitému tvaru zubů je teoretické určení deformací a tuhosti velmi obtížné, ale poměrně snáze je lze určit experimentálně. Experimentálně se určuje tuhost ozubení nejčastěji staticky měřením deformací ozubení zatíženého konstantní silou nebo při pomalém otáčení seismickým měřením úchylek.

Výzkumu tuhosti čelního ozubení je věnována řada prací. Starší práce, zhruba do konce šedesátých let, většinou vycházejí z klasické teorie pružnosti a uvažují zub jako vetknutý nosník. Závažným přínosem byla práce Jaromillo, který uvažuje zub jako vetknutou desku zatíženou osamělou silou. V posledních desetiletích je otázka tuhosti ozubení stále velmi aktuální a je řešena na základě novodobých metod výpočtů tuhosti (metoda konečných prvků, metoda okrajových prvků apod.) nebo s použitím nejnovější měřicí techniky.

V dalším textu vysvětlíme základní pojmy a podáme úvod do problematiky tuhosti ozubení. Uvažujme nejprve sám zub (viz. obr.35a). Působením normálové síly F se zub deformuje, jak je naznačeno tlustou čarou. Výsledná deformace v normálovém směru se skládá z deformace ohybu, smyku, deformace v místě vetknutí a deformace dotykové.



Obr.35. Deformace zubu a), deformace páru přímých zubů b), c).

Deformace páru zubů si můžeme představit dvojím způsobem. Podle první představy (viz. obr.35b) je tenkou čarou naznačen pár zubů dotýkající se v bodě X na záběrové přímce τ_b v nezatíženém stavu. Zatížením zubů se profily myšleně deformují do tvaru znázorněného

čárkovaně a protnou závěrovou přímkou v bodech X_1 a X_2 . Příslušné deformace jsou δ_1 a δ_2 . Aby se deformované zuby dotkly opět v bodě X , jak tomu je ve skutečnosti, musí se jednotlivá kola pootočit o úhel $\varphi_{\delta 1}$ a $\varphi_{\delta 2}$.

Podle druhé představy (viz. obr.35c) se nedeformované zuby dotýkají v bodě X' a po deformaci obou zubů dostaneme body X_1 a X_2 . K uvedení deformovaných zubů do dotyku si nyní představme, že se znehybní jedno kolo (např. kolo 2), a potom se musí druhým kolem otočit o úhel ${}^I\varphi_\delta$, aby došlo k dotyku deformovaných zubů v bodě $X \equiv X_2$.

Celková deformace páru zubů je dána součtem celkových deformací δ_1 , δ_2 jednotlivých zubů, tj. součtem ohybové deformace δ_{F1} , δ_{F2} jednotlivých zubů (včetně deformace vetknutí a smykové) a deformace ohybové δ_H , takže

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \delta_{F1} + \delta_{F2} + \delta_H = |\varphi_{\delta 1} r_{b1}| + |\varphi_{\delta 2} r_{b2}| = |{}^I\varphi_\delta r_{b1}|,$$

kde r_{b1} , r_{b2} jsou poloměry základních kružnic páru ozubených kol.

Tuhost jednoho páru zubů (jednopárová) přímého ozubení je definována rovnicí^{*)}

$$c_p = \frac{w_p}{\delta}, \quad p = I, II, \dots,$$

kde index p je indexem páru zubů a w_p je širkové zatížení daného páru zubů. Deformace a tuhost jednotlivých párů zubů se mění po dráze záběru. Zub má největší deformaci, působí-li síla ve vrcholu zubu následkem velké deformace ohybu. Typický průběh dílčích deformací δ_{F1} , δ_{F2} , δ_H a výsledné deformace a jí odpovídající tuhosti přímého ozubení v závislosti na dráze záběru je uveden na obr.36a. Maximální jednopárová tuhost je tedy přibližně uprostřed délky záběru, značí se c' a lze ji stanovit z empirického vzorce

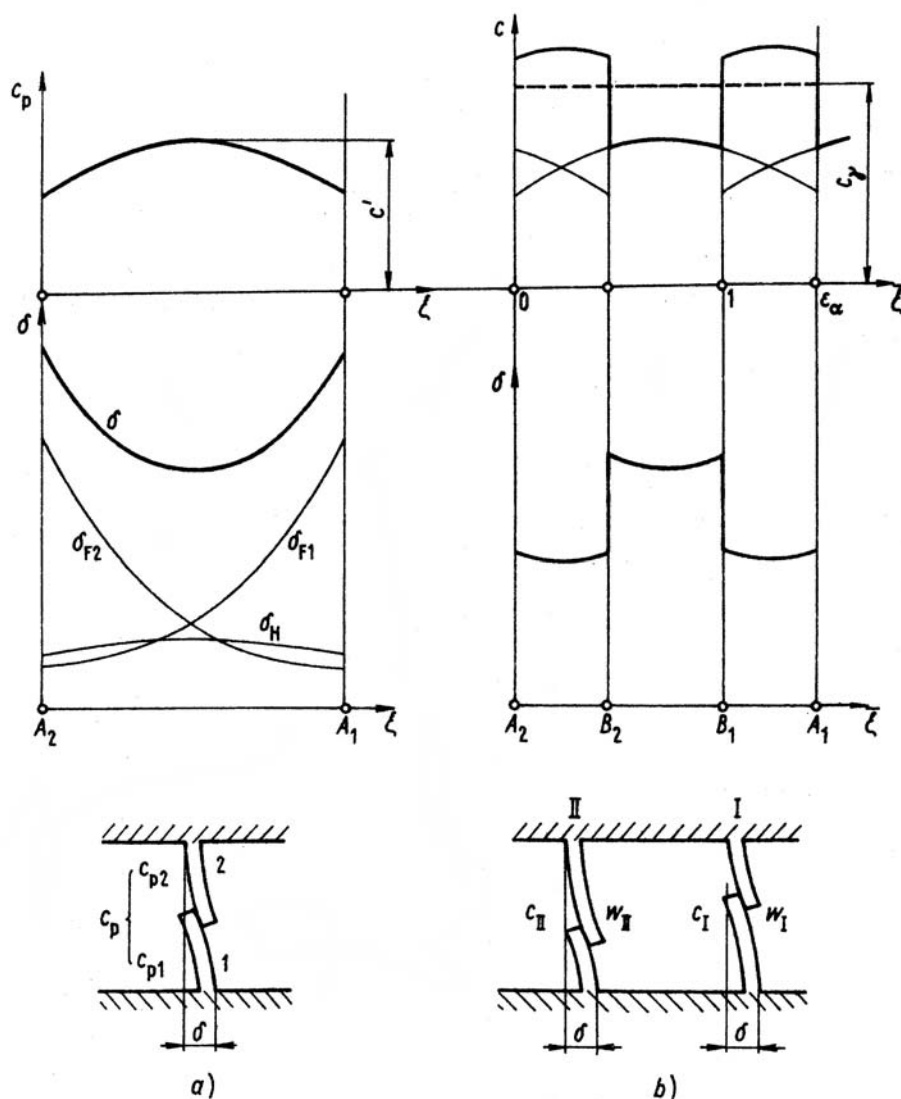
$$\begin{aligned} \frac{1}{c'} = & 0,04723 + \frac{0,15551}{z_{n1}} + \frac{0,25791}{z_{n2}} - 0,00635 x_1 - 0,11654 \frac{x_1}{z_{n1}} - \\ & - 0,00193 x_2 - 0,24188 \frac{x_2}{z_{n2}} + 0,00529 x_1^2 + 0,00182 x_2^2, \end{aligned}$$

kde x_1 , x_2 jsou korekce ozubeného soukolí, je-li dané ozubené soukolí korigováno, a kde z_{n1} , z_{n2} jsou počty virtuálních zubů ozubených kol příslušného soukolí, které se stanoví pomocí následujícího vztahu

$$z_{n1} = \frac{z_1}{\cos^3 \beta}, \quad z_{n2} = \frac{z_2}{\cos^3 \beta},$$

kde z_1 , z_2 jsou počty zubů ozubených kol příslušného soukolí a kde β je úhel sklonu zubů (v případě přímého čelního ozubení je $\beta = 0$ a počty zubů jsou totožné s počty virtuálních zubů ozubených kol příslušného soukolí).

^{*)} V soulase s normami ISO budeme příslušné tuhosti ozubení označovat písmenem „c“ a příslušným indexem. V ISO normách jsou konstantami „k“, kterými se běžně v dynamice označují tuhosti prvků, vyjádřeny korekční součinitele.



Obr.35. Průběh tuhosti a deformace přímého ozubení – jednopárové a), celkové b).

Deformaci jednoho páru zubů je možné si představit modelem sériového zapojení dvou pružin (viz. obr.35a dole) s tuhostí jednotlivých zubů c_{p1} a c_{p2} nebo tří pružin s tuhostmi c_{F1P} , c_{F2P} jednotlivých zubů v ohybu a tuhosti dotykové c_{HP} . Výsledná tuhost jednoho páru zubů je potom dána vztahem

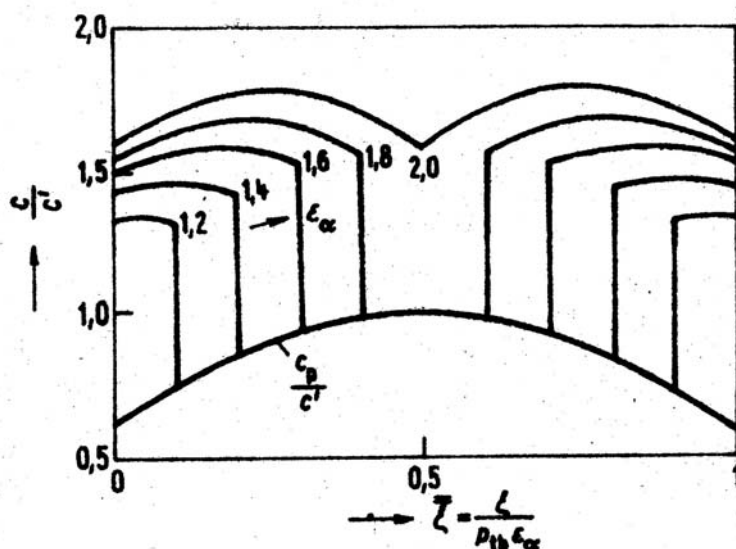
$$\frac{1}{c_p} = \frac{1}{c_{p1}} + \frac{1}{c_{p2}} = \frac{1}{c_{F1P}} + \frac{1}{c_{F2P}} + \frac{1}{c_{HP}}, \quad p = I, II, \dots,$$

a závisí na tvaru obou zubů, tedy především na počtech zubů ozubených kol z_1 a z_2 soukolí, úhlu profilu α_n , součiniteli výšky ozubení κ a součiniteli posunutí x_1 a x_2 (vyjadřuje míru korekce daného ozubeného soukolí).

Jak již bylo řečeno, jednopárová tuhost ozubení c_p se mění po dráze záběru (viz. obr.36a), přičemž bylo zjištěno, že průběh $c_p(\xi)$ je pro různé parametry ozubení velmi podobný a lze jej tedy vyjádřit Ajrapetovým-Genkinovým empirickým vzorcem

$$c_p(\bar{\xi}) = c' \left\{ 1 - 0,4 \left(\frac{2\bar{\xi}}{\varepsilon_\alpha} \right)^2 \right\},$$

jehož grafické znázornění, v závislosti na součiniteli záběru ε_α , je uvedeno na obr.36.



Obr.36. Závislost poměrné tuhosti na součiniteli záběru přímého ozubení.

Pro součinitel záběru ε_α a poměrnou dráhu záběru $\bar{\xi}$ platí

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{p_{bt}} = \frac{\xi \cos \beta}{\pi m_n},$$

kde β je úhel sklonu zubů, m_n je normálový modul ozubení, ε_1 a ε_2 jsou součinitele záběru spoluzabírajících kol, které vypočteme ze vztahů

$$\varepsilon_1 = \frac{z_1}{2\pi} [tg \alpha_{ta1} - tg \alpha_{tw}], \quad \varepsilon_2 = \frac{z_2}{2\pi} [tg \alpha_{ta2} - tg \alpha_{tw}],$$

přičemž platí

$$\alpha_{tw} = \arccos \left[\frac{a}{a_w} \cos \alpha_t \right], \quad \alpha_t = \arctg \frac{tg \alpha_n}{\cos \beta},$$

$$\alpha_{ta1} = \arccos \frac{d_1 \cos \alpha_t}{d_{a1}}, \quad \alpha_{ta2} = \arccos \frac{d_2 \cos \alpha_t}{d_{a2}},$$

kde a je vzdálenost os přímého nekorigovaného ozubení, a_w je skutečná vzdálenost os (pro přímé nekorigované ozubení je $a = a_w$), α_{tw} je úhel záběru, α_{ta1} a α_{ta2} jsou hlavové úhly profilu, d_1 a d_2 jsou průměry roztečných kružnic, d_{a1} a d_{a2} jsou průměry hlavových kružnic, α_f je čelní úhel profilu a α_n je normálový úhel profilu (pro normální ozubení je $\alpha_n = 20^\circ$).

V úseku dvoupárového záběru zabírají současně dva páry zubů, čemuž odpovídá paralelní model dvou pružin v dolní části obr.35b. Výsledná tuhost je pak definována jako součet dílčích tuhostí jednotlivých párů ozubení. Typický průběh výsledné tuhosti přímého ozubení po dráze záběru je znázorněn v horní části obr.35b a ve střední části odpovídající průběh deformace δ . V úseku jednopárového záběru $\overline{B_2 B_1}$ se výsledná tuhost samozřejmě rovná tuhosti jednopárové. V úseku jednopárového i dvoupárového záběru se výsledná tuhost mění poměrně málo. Výsledná tuhost c a deformace δ přímého ozubení se tedy po dráze záběru periodicky mění s periodou rovnou čelní základní rozteči p_{tb} . Při přibližných výpočtech pevnosti a základních dynamických analýzách počítáme se střední hodnotou výsledné tuhosti c_γ během celého záběru, kterou nazýváme **záběrovou tuhostí**, přičemž pro ni platí

$$c_\gamma = \frac{1}{p_{tb}} \int_0^{p_{tb}} c(\xi) d\xi = \int_0^1 c(\bar{\xi}) d\bar{\xi} = \frac{1+3\varepsilon_\alpha}{4} c',$$

kde ε_α je součinitel záběru a c' je tuhost jednoho páru zubů. V případě ozubení s jinou dvojicí materiálů než ocel-ocel je třeba hodnoty tuhosti jednoho páru zubů c' a záběrové tuhosti c_γ násobit součinitelem η , pro který platí

$$\eta = \frac{E}{E_{ocel}} = \frac{1}{E_{ocel}} \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2},$$

kde E_{ocel} je modul pružnosti v tahu ocele, E_1 a E_2 jsou moduly pružnosti v tahu materiálů jednotlivých ozubených kol soukolí (např. pro ocel-šedá litina je $\eta = 0,74$).

4. Poruchy v pohonových soustavách

Jako každá technická soustava i pohony mohou být postiženy poruchami. Od jednoduchých, provozních, přes poruchy řízení (systémové) až po havarijní, často s vážnými výsledky. Je proto samozřejmé, že se touto problematikou museli a musí technici a inženýři zabývat. Většina pohonů obsahuje rotační části jejichž provoz je doprovázen mechanickým chvěním. Na základě analýzy chvění lze získat cenné informace o provozním stavu pohonových soustav.

Hodnocení provozních vlastností pohonových soustav podle úrovně mechanického chvění a s tím spojená i prognostika poruch má dlouhou tradici, jenž vychází se známé „*poslechové*“ metody kdy kovová tyčka (v krajním případě dlouhý šroubovák) byla přiložena zašpičatělým ostřím k ložisku nebo k plášti rotujícího tělesa a druhým koncem ke spánkové kosti blízko ucha odborníka, který na základě svých zkušeností a technického citu byl schopen odhalit existující nebo blížící se poruchu. Tato metoda byla tak účinná, že na jejím základě přistoupili výrobci zkušebních a diagnostických zařízení k vývoji a výrobě odpovídajících přístrojů.

Dnes máme k dispozici moderní analyzátory, založené na rychlé Fourierově transformaci, které spolu s počítači umožňují zjišťování poruch a závad většiny běžných pohonových soustav již v jejich počátečním stadiu. Jsou schopné identifikovat poruchové signály, typické pro konkrétní typy poruch často i velmi dlouho před jejich destrukčním působením a v mnohých případech, v kombinaci s expertními systémy, odhalit i jejich možné příčiny. Je ale nezbytné poznamenat, že zkušený odborník je i dnes schopen zjistit příznaky závad mnohých pohonových soustav dříve, než mnohé měřiče chvění.

4.1. Technické požadavky na diagnostické měřicí soustavy

Pro diagnostiku poruch pohonových soustav jsou dnes k dispozici účinné analyzátory chvění, které jsou schopné přímo v provozu rozhodnout, zda je či není sledované zařízení spolehlivé. Technické požadavky na tato analyzátory lze přibližně formulovat takto :

- Analyzátor chvění musí umožnit zjištění závady v počátečním stadiu. Použité pracovní postupy, musí být rychlé, jednoduché a uživatelé nemusí mít zvláštní kvalifikaci.
- Analyzátor chvění musí umožňovat podrobnou analýzu, potřebnou při diagnostice zjištěných závad a jejich příčin. Použité metody v tomto případě mohou vyžadovat vysoce odborníky.

Tyto protichůdné požadavky vedly k tomu, že moderní analyzátory jsou koncepčně i konstrukčně řešeny se zřetelem na možnost jeho použití ve dvou pracovních režimech, které umožňují :

- na jedné straně zjišťovat závady na základě spekter chvění, které lze snadno zpracovávat a porovnávat (*spekter konstantní relativní šířkou pásem*) . Tato spektra umožňují včasnou identifikaci projevujících se závad s tím, že sledovaná zařízení mohou být ještě ponechána po určitou dobu v provozu (i několik měsíců a teprve poté jsou tato zařízení podrobena údržbě nebo opravě),

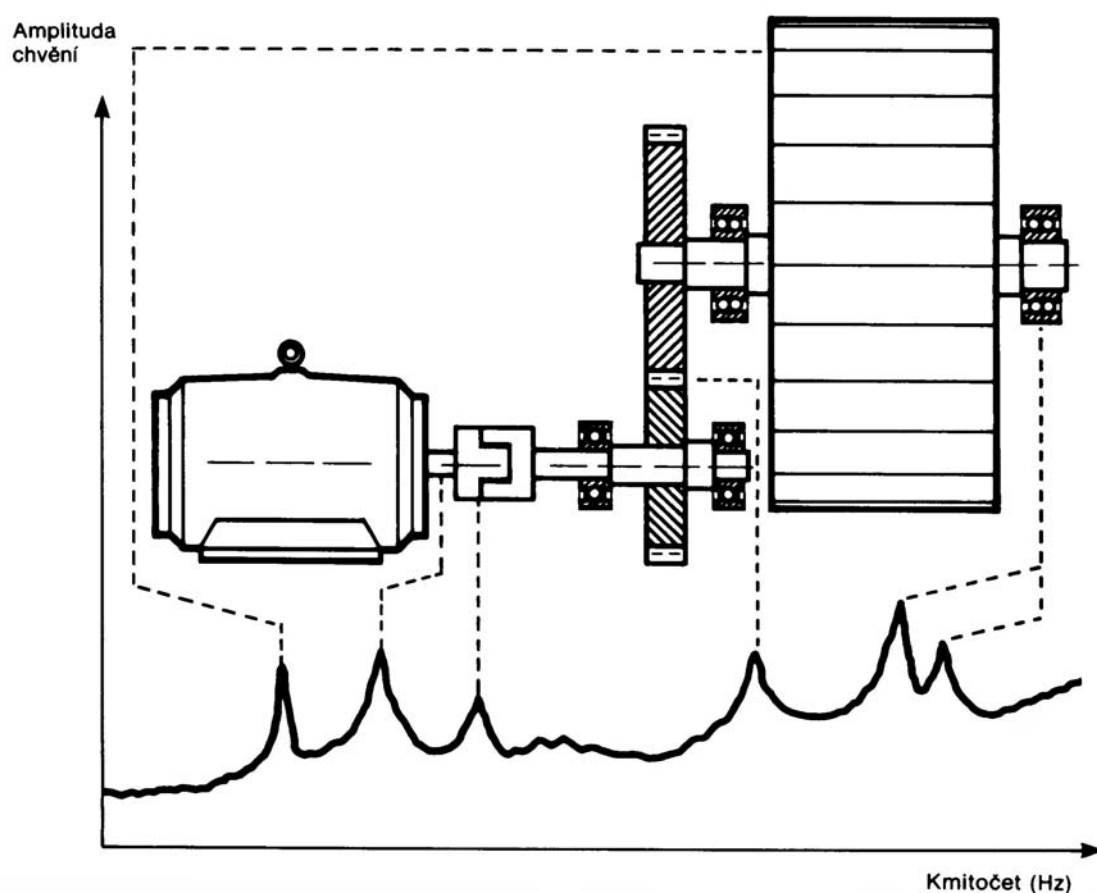
- na straně druhé umožňují vyhledávání závad a jejich příčin pomocí metod založených na rychlé Fourierově transformaci a využití širokých možností zpracování dat při diagnostice strojních zařízení.

4.2. Vibrace v pohonových soustavách

Vibrace v pohonových soustavách, způsobené z velké části poruchami jednotlivých strukturálních, zahrnují :

- oblast nízkých kmitočtů,
- oblast středních kmitočtů a také
- oblast vysokých kmitočtů.

Na obr.37 je znázorněn příklad jednoduché pohonové soustavy, kde jsou tyto oblasti „přiřazeny“ konkrétním technickým prvkům jako jsou výstupní hřídele motorů, spojky, ozubená kola a ložiska. Na povrchu těchto prvků pak jsou nejčastěji kmitočtová spektra snímána.



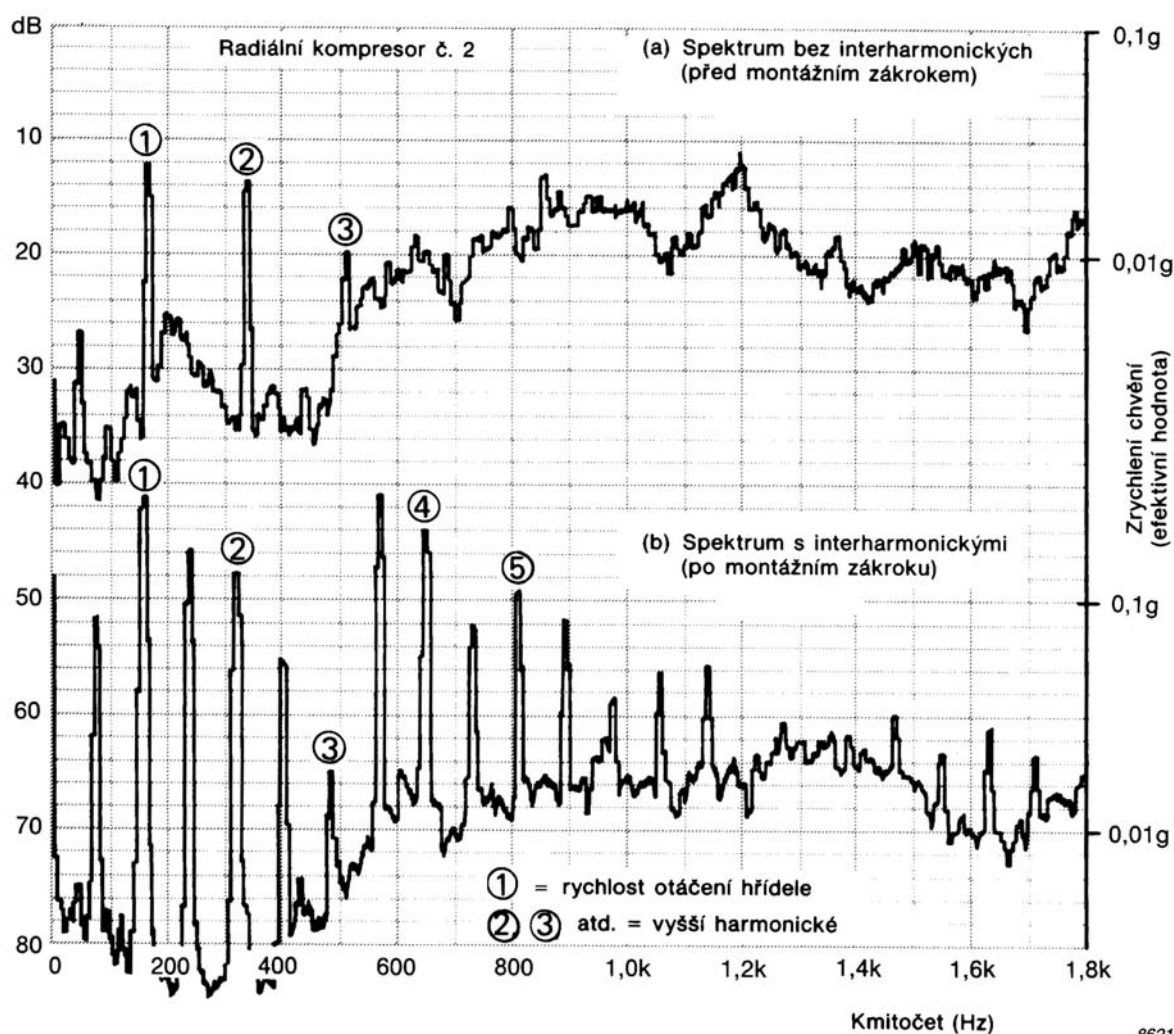
Obr.37. Schéma pohonu kulového mlýna.

4.2.1. Oblast nízkých kmitočtů

Kmitočtová spektra mechanického chvění, snímaného na tělesech ložisek elektromotoru a převodovky, obsahují *složky s nízkými kmitočty*, odpovídající rychlostem otáčení hřídelů. Tyto složky chvění jsou zapříčiněny nevyvážeností, přesazením, ohybem hřídelů apod.

Složky s kmitočty, odpovídajícími dvojnásobku rychlostí otáčení hřídelů (druhým harmonickým), jsou důsledkem přesazení a/nebo ohybu hřídelů. Sledováním časových změn uvedených kmitočtových složek je tedy možno zjišťovat a vyhledávat závady popsaného druhu.

Hlavním problémem radiálních ložisek je *hydrodynamická nestabilita* soustavy, tvořené hřídelem, olejovou vrstvou a tělesem ložiska. Příčinou víření oleje a tím i chvění je pohyb těžiště hřídele v mezích vůle ložiska. Odpovídající problém vzniká často u málo zatížených hřídelů s vysokými rychlostmi otáčení. Kmitočty složek průvodního chvění odpovídají 40 až 49% rychlosti otáčení, avšak složky, vyvolané vířením oleje, byly zjištěny i na vyšších kmitočtech. Výskyt těchto složek závisí na jakosti povrchů hřídelů a ložisek.



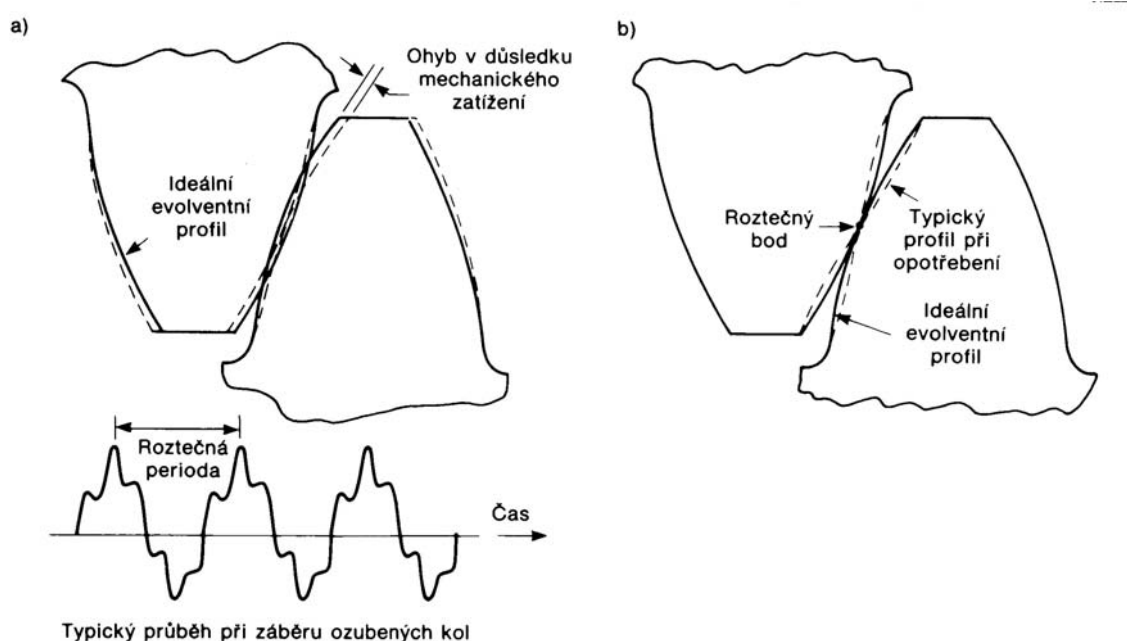
Obr.38. Výskyt interharmonické rychlosti otáčení při uvolnění mechanických vazeb.

Hysterezní víření je jiným druhem samobuzené nestability, vznikající při překročení kritické rychlosti rotoru a udržující odpovídající kmitočet nezávisle na dalších změnách rychlosti otáčení rotoru. Tato nestabilita vzniká v důsledku mechanické hystereze soustav, konajících točivé pohyby. Další druh nestability ohebných rotačních součástí je vyvoláván prouděním, přičemž příslušné kmitočty odpovídají kmitočtům hysterezního víření (nehledě na rozdílný mechanismus vzniku).

Posledním druhem závad, projevujících se složkami v oblasti nízkých kmitočtů, je uvolnění mechanických vazeb. Tyto závady se projevují vznikem subharmonických a meziharmonických složek, tj. „půlté“ harmonické, „jedenapůlté“ harmonické apod. (viz. obr.38).

4.2.2. Oblast středních kmitočtů

V oblasti středních kmitočtů se ve spektrech mechanického chvění vyskytují složky, způsobené záběrem ozubených kol. Tyto složky se nazývají **složkami se středními kmitočty**. Kmitočty uvedených složek odpovídají násobkům rychlosti otáčení a počtu zubů ozubeného soukolí a nazývají se kmitočty záběru.

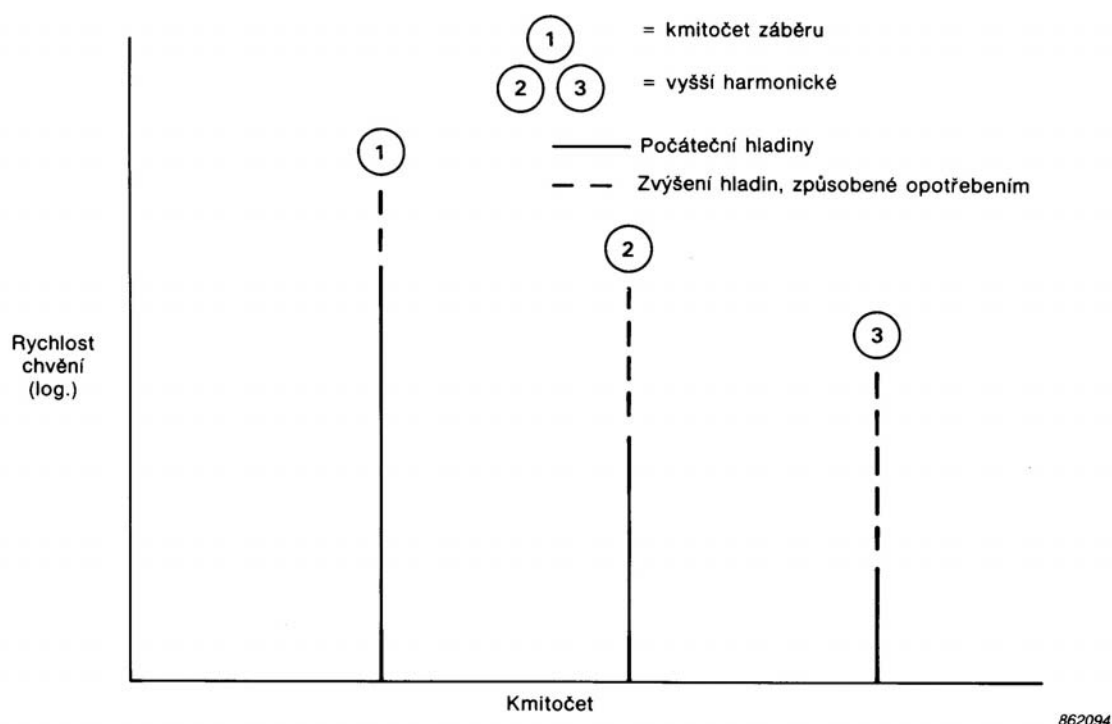


Obr.39. Ohyb zubů ozubení v důsledku mechanického zatížení.

870200

Chvění zcela nového a nezávadného ozubeného soukolí obsahuje složku s kmitočtem záběru. Tato složka však není jedinou složkou chvění. Mechanické zatížení vyvolává deformace zubů, přičemž velikost těchto deformací závisí na počtu zubů v záběru (viz. obr.39a). Zjednodušený signál, odpovídající mechanickému chvění nového ozubeného soukolí (převodovky), obsahuje nejen složku s kmitočtem záběru, ale i vyšší harmonické (viz. obr.39).

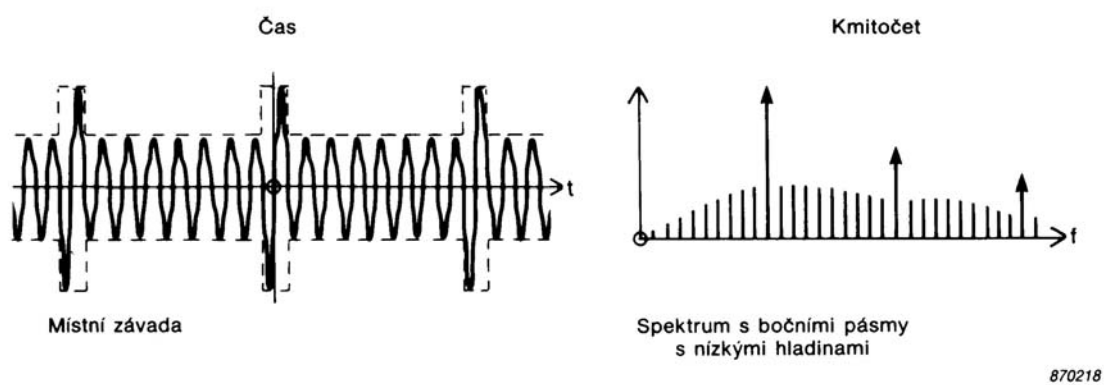
Postupné opotřebení je provázáno průběžnými pomalými změnami profilu zubů ozubených kol, způsobených skluzem zubů v záběru ve všech bodech kromě roztečných bodů (viz. obr.39b). Z výše uvedeného vyplývá, že se postupné opotřebení převodovky projevuje zejména změnami složek s kmitočty, odpovídajícími druhé harmonické kmitočtu záběru. Jelikož změny, provázející opotřebení, nejsou sinusové, spektra chvění obsahují také rostoucí vyšší harmonické, jak je velmi zjednodušeně znázorněno na obr.40.



Obr.40. Spektrum ilustrující zvýšení harmonických složek v důsledku opotřebení ozubení.

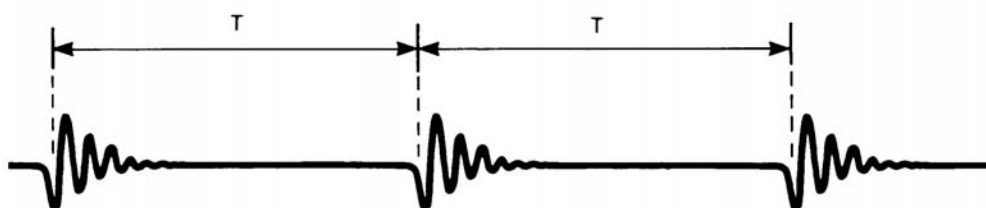
Počáteční stadium místní závady se však **neprojeví** růstem amplitud složek s kmitočty záběru a odpovídajících vyšších harmonických. Představme si ozubené kolo s prasklým, avšak dosud neulomeným zubem. Závada tohoto druhu zcela jistě unikne pozornosti personálu, obsluhujícího odpovídající strojní zařízení. Prasklý zub se však bude v důsledku snížené pevnosti vychylovat v záběru více než ostatní neporušené zuby. Odpovídající signál mechanického chvění bude mít tvar, znázorněný na obr.41.

Uvedený signál je možno považovat za signál, odpovídající chvění nezávadné (možná však částečně opotřebované) převodovky, se superponovanými impulsy, vyvolanými nadměrnou výchylkou porušeného zubu. Spektrum sledu takových impulsů obsahuje diskrétní složky, jejichž vzájemná vzdálenost ve kmitočtové oblasti je určena opakovacím kmitočtem impulsů (viz. obr.42). Obálka spektra sledu impulsů je totožná spektru jednotlivých impulsů (pochopitelně s výjimkou měřítka). Závada uvedeného druhu se tedy již v počátečním stadiu projeví ve spektru mechanického chvění zvětšením amplitud bočních pásem, nacházejících se pod a nad kmitočtem záběru a kmitočtovým odstupem, odpovídajícím rychlosti otáčení.

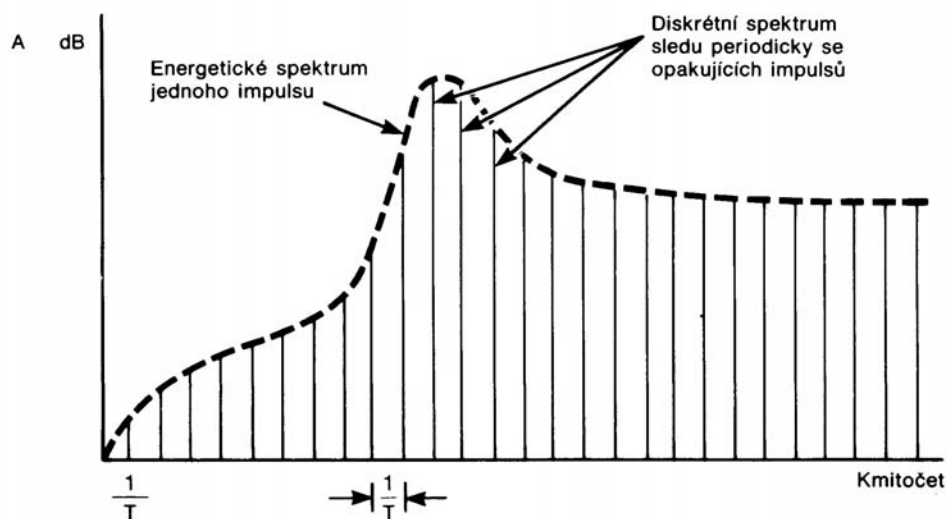


Obr.41. Projev závady ozubeného převodu ve spektru mechanického chvění.

a) Časový průběh



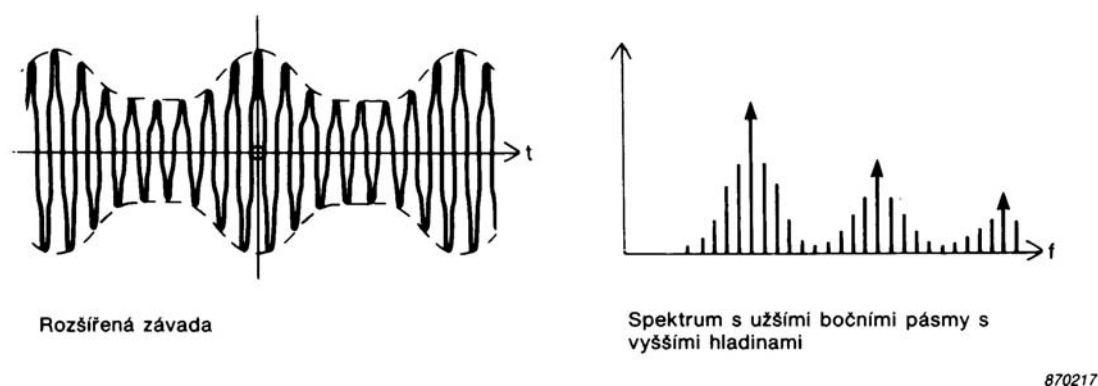
b) Spektra



Obr.42. Diskrétní kmitočtové spektrum odpovídající sledu impulsů v časové oblasti.

V oblasti kmitočtů, nižších než kmitočet záběru, se však také nacházejí složky s nízkými kmitočty. Tyto složky byly popsány výše v souvislosti se závadami, provázejícími nevyváženost, ohyb hřídelů, přesazení apod., a v důsledku větší energie maskují méně intenzivní složky, odpovídající prasklému zubu.

Složky s kmitočty záběru ozubených kol a jejich harmonické jsou také intenzivnější než složky, vyvolané závadou nebo závadami v počátečním stadiu. Zvětšení amplitud složek, vzniklých v důsledku závady, je však většinou zřetelné mezi harmonickými kmitočty záběru. Postupné zvětšování závady, například rozšíření lomu na více zubů ozubeného kola, je provázeno postupnou změnou povahy signálu, odpovídajícího mechanickému chvění zařízení. Původně slabý signál se superponovanými impulsy se pozvolna zvětšuje a nabývá povahy amplitudově modulovaného signálu (viz. obr.43). Spektrum tohoto signálu se mění odpovídajícím způsobem s charakteristickým růstem bočních pásem, rozložených kolem kmitočtů záběru a harmonických. Odstup bočních pásem je určen rychlostí (či rychlostmi) otáčení.

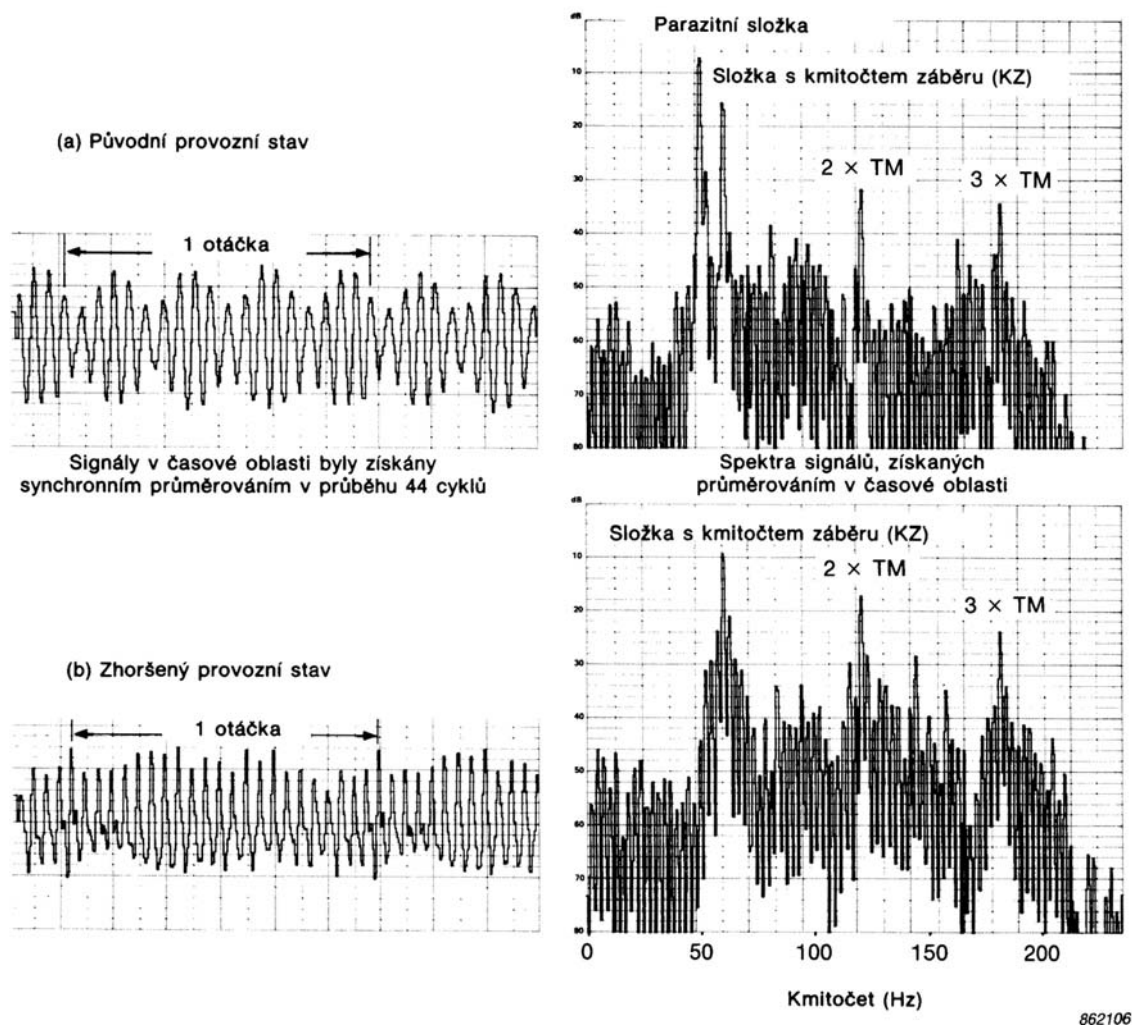


Obr.43. Vliv postupného zvětšování závady ozubení na amplitudy bočních pásem spektra.

Na obr.44 jsou znázorněny časové průběhy a spektra signálů, odpovídajících mechanickému chvění převodovky v nezávadném a zhoršeném provozním stavu. Celkové opotřebení převodovky se projevuje nevelkým zvětšením amplitudy složky s kmitočtem, odpovídajícím kmitočtu záběru ozubených kol, a výrazným zvětšením amplitud složek s kmitočty druhé a třetí harmonické.

V pásmu mezi kmitočtem záběru a druhou harmonickou je patrné výrazné zvětšení amplitud složek s kmitočtovým odstupem, odpovídajícím rychlosti otáčení. Zvětšení amplitud těchto složek lze považovat za příznak závady v počátečním stadiu.

Parazitní složka spektra chvění nezávadné převodovky je způsobena geometrickou nepřesností ozubeného kola, vzniklou při výrobě v důsledku nepřesnosti dělicího přístroje. Tato složka se zcela ztratila při rostoucím opotřebení převodovky.

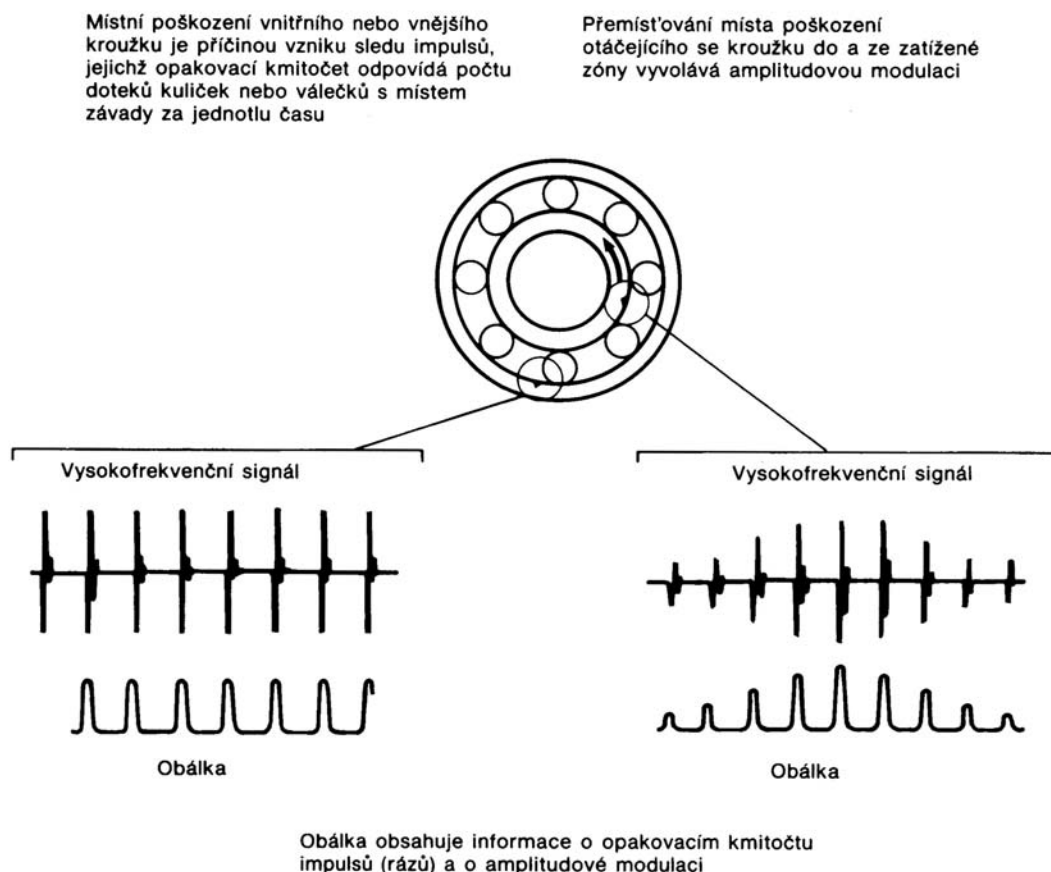


Obr.44. Časové průběhy a spektra signálu mechanického chvění nezávadné a opotřeбенé převodovky.

4.2.3. Oblast vysokých kmitočtů

V oblasti vysokých kmitočtů se ve spektrech mechanického chvění vyskytují složky, které jsou spojeny s projevy *závad valivých ložisek*. Tyto složky se dále nazývají *složkami s vysokými kmitočty*.

Typickou počáteční závadou valivého ložiska je trhlina nebo jamka, způsobená korozí. Poškozeným prvkem může být buď vnitřní nebo vnější kroužek anebo váleček či kulička. Průchod každého válečku nebo kuličky poškozeným místem provází vznik impulsu s malou amplitudou. Jednotlivé impulsy (podobné lehkým úderům kladiva) předávají energii tělesu ložiska, které kmitá na vlastním kmitočtu (rezonančním kmitočtu). Kmity jsou tlumené a doznívají podobně kmitům mosazného zvonu (kmitočet mechanických kmitů zvonu je určen jeho dynamickými parametry a nezávisí na počtu a síle budících rázů). Je tedy možno říci, že uvažovaná mechanická soustava se v takovém případě chová jako mechanický zesilovač.



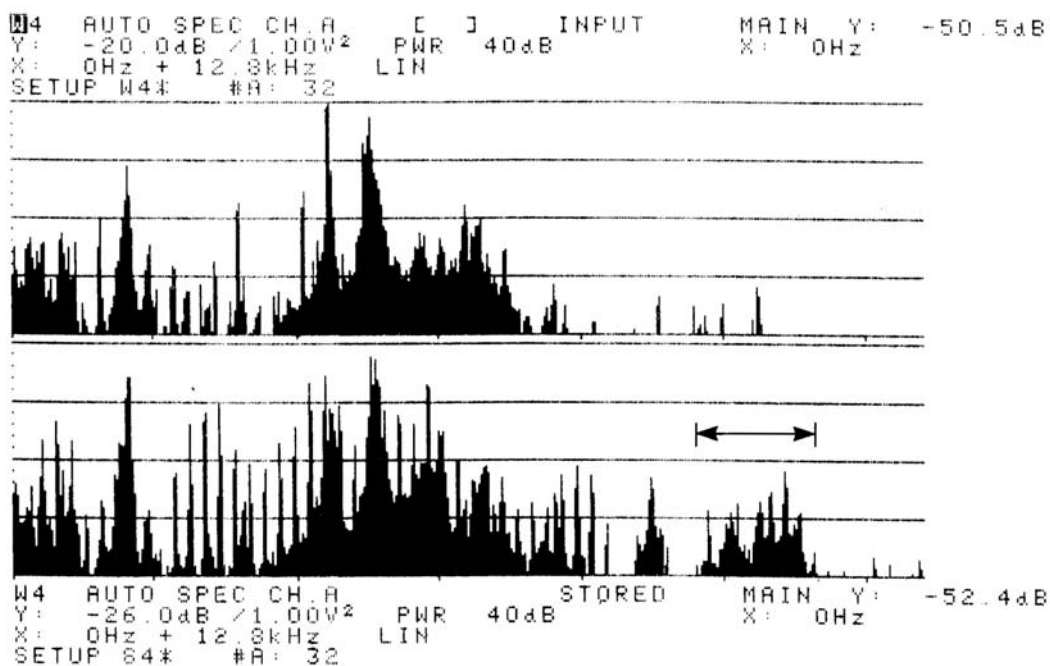
862084/1

Obr.45. Projevy poškození vnějšího a vnitřního kroužku valivého ložiska.

V případě poškození upevněného kroužku ložiska (dále se předpokládá, že upevněným je vnější kroužek) mají impulsy shodné amplitudy. Naopak, při poškození pohyblivého se kroužku ložiska (zde vnitřního kroužku) se amplitudy impulsů mění, a to v závislosti na změnách zatížení válečků či kuliček. Impulsy jsou tedy určitým způsobem amplitudově modulovány (viz. obr.45). Vliv této modulace na obálku si podrobněji osvětlíme v následujícím výkladu.

Projev závady ve spektru mechanického chvění, tak průkazný jako v příkladu na obr.46, není v technické praxi častý. Impulsy způsobené závadou valivého ložiska, zpravidla nejsou doistatečně intenzivní pro to, aby se odpovídající diskrétní složky výrazně projevovaly i v oblastech nízkých a středních kmitočtů. Projev závady je však jasně patrný v oblasti vysokých kmitočtů (na obr.46 v označeném \leftrightarrow pásmu mezi 9,6 a 11,3 kHz), kde přítomnost většího počtu složek spektra ukazuje na poškození valivého ložiska.

Uvedené složky s vysokými kmitočty spolu s přenosem energie impulsů na jiné součásti (tělesa ložisek, opěry apod.) s mechanickými rezonancemi v oblasti vysokých kmitočtů umožňují včasné zjištění závady valivých ložisek monitorováním mechanického chvění v úzkých kmitočtových pásmech kolem rezonančních kmitočtů sledované pohonové soustavy.



870221

Obr.46. Příklad spektra mechanického chvění nezávadného a porušeného kuličkového ložiska

Velmi ostré a krátké impulsy, způsobené závadou valivého ložiska (zárodek trhliny, uvažované zde jako příklad, téměř nelze pozorovat nevycevičeným zrakem), mají kmitočtové složky v oblasti vysokých kmitočtů. Energie těchto složek je však obecně mnohokrát menší než energie výše popsanych složek s nízkými a středními kmitočty. Proto je nutno hledat příznaky počínajících závad valivých ložisek v oblasti vysokých kmitočtů.

Kmitočty, na kterých pohonová soustava zesiluje mechanické chvění (tj. rezonanční kmitočty) lze snadno určit experimentálně pomocí jednobánalového kmitočtového analyzátoru, měřícího a analyzujícího odezvy na rázové buzení. Spolehlivou indikaci kmitočtů, v jejichž blízkosti je ve spektru třeba hledat příznaky závad valivých ložisek, je možno získat buzením těles těchto ložisek lehkými údery rázového kladívka a určením spekter odezev, tj. signálů, snímaných snímačem zrychlení mechanického chvění v místech upevnění snímačů při monitorování mechanického chvění celé pohonové soustavy.

4.2.4. Shrnutí projevů počínajících závad pohonových soustav

Provedme si nyní shrnutí typických projevů počínajících závad točivých částí pohonových soustav, zejména projevy těchto závad ve kmitočtovém oblasi. Bylo uvedeno, že

- **oblast nízkých kmitočtů**, určená dolní mezí, nacházející se pod rychlostí otáčení, a horní mezí, tvořenou nižšími (čtvrtou až šestou) harmonickými, obsahuje informace o závadách, způsobených nevyvážeností, ohybem hřídelů, přesazením hřídelů, nestabilitou radiálních ložisek a uvolněním mechanických vazeb,

- **oblast vysokých kmitočtů**, definovaná jako oblast, ve které převládající složky spekter mechanického chvění souvisejí s mechanickými rezonancemi, obsahuje informace o přínajících závadách valivých ložisek. Závady ložisek (např. poškození jednoho z kroužků, malé trhlinky aj.), projevující se úzkými a ostrými impulsy, vyvolávají rezonance jiných součástí. Tyto závady lze zjistit v oblasti vysokých kmitočtů, protože odpovídající složky zde nejsou překryty intenzivnějšími složkami, které převládají v oblastech nízkých a středních kmitočtů spekter mechanického chvění,
- **oblast středních kmitočtů**, tj. mezi oblastmi nízkých a vysokých kmitočtů, obsahuje informace o závadách ozubených převodů a převodovek. Opotřebením ozubení se projevuje na kmitočtech záběru ozubených kol a jejich harmonických. Závady v počátečním stadiu (např. prasklý, avšak neulomený zub ozubeného kola) jsou zpravidla příčinou vzniku bočních pásem rozložených kolem kmitočtů záběru a harmonických. Amplitudy těchto složek bočních pásem jsou však obvykle menší než amplitudy složek, příslušejících kmitočtům záběru a jejich harmonickým.

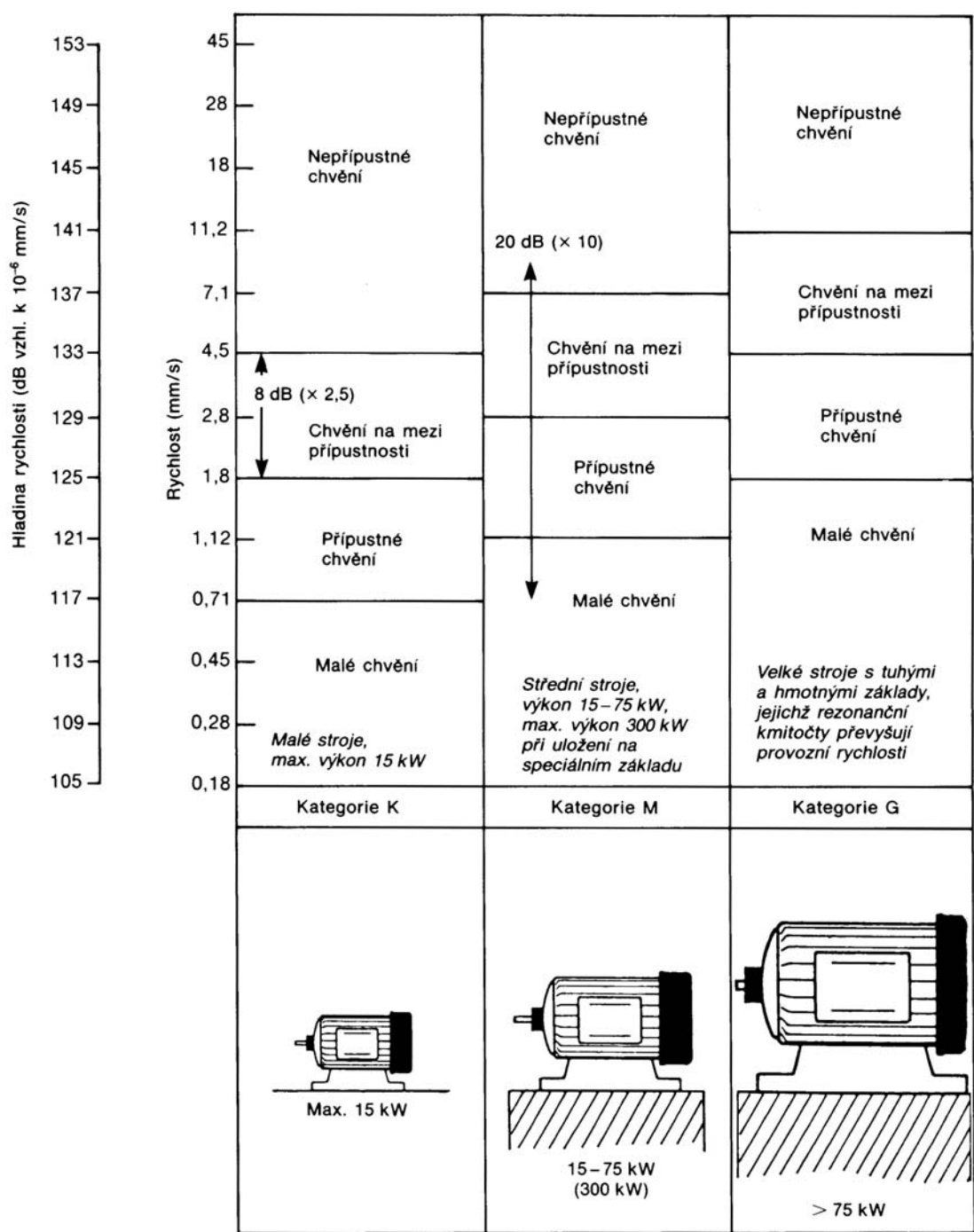
4.3. Zjišťování závad pohonových soustav

V předchozím článku (tj. článku 4.2.) bylo uvedeno a doloženo, že signály, odpovídající mechanickému chvění pohonových soustav, obsahují cenné informace o provozním stavu těchto zařízení, zejména o točivých částech pohonových soustav. Sledování provozního stavu pohonových soustav a zjišťování jejich závad v počátečním stadiu, založené na podrobné analýze uvedených signálů, je pro každodenní praxi příliš obtížné a drahé. Proto je nutno použít metodu, která

- umožňuje včasné zjištění většiny závad,
- co nejúčinněji zamezuje chybným závěrům,
- je dostatečně jednoduchá a neklade zvláštní nároky na kvalifikaci uživatelů,
- zajišťuje dostatečné množství informací pro zjištění příznaků závad a pro rozhodnutí o dalším postupu, tj. o provedení podrobné analýzy.

Většina metod, používaných v minulosti ke zjišťování závad pohonových soustav, se zakládá na porovnávání efektivních hodnot rychlosti chvění s výsledky předchozích měření nebo s normativně stanovenými mezními hodnotami, např. hodnotami, stanovenými normami ISO 2372 a ISO 3945. Tyto metody byly založeny na teoretickém předpokladu, že mechanické chvění strojů určité kategorie (dle velikosti a energie přenášené hřídeli) má obdobné nebo dokonce totožné hodnoty amplitud či hladin rychlosti ve vymezeném pásmu od 10 Hz do 1 kHz (viz. obr.47).

Z výkladu předchozího článku (tj. článku 4.2.) však plyne, že použití uvedené metody při monitorování provozního stavu pohonových soustav umožňuje zjištění jejich pokročilých závad, způsobených nevyvážeností, velkým přesazením nebo podstatným ohybem hřídelů a projevujících se díky velké energii odpovídajících složek spekter mechanického chvění.

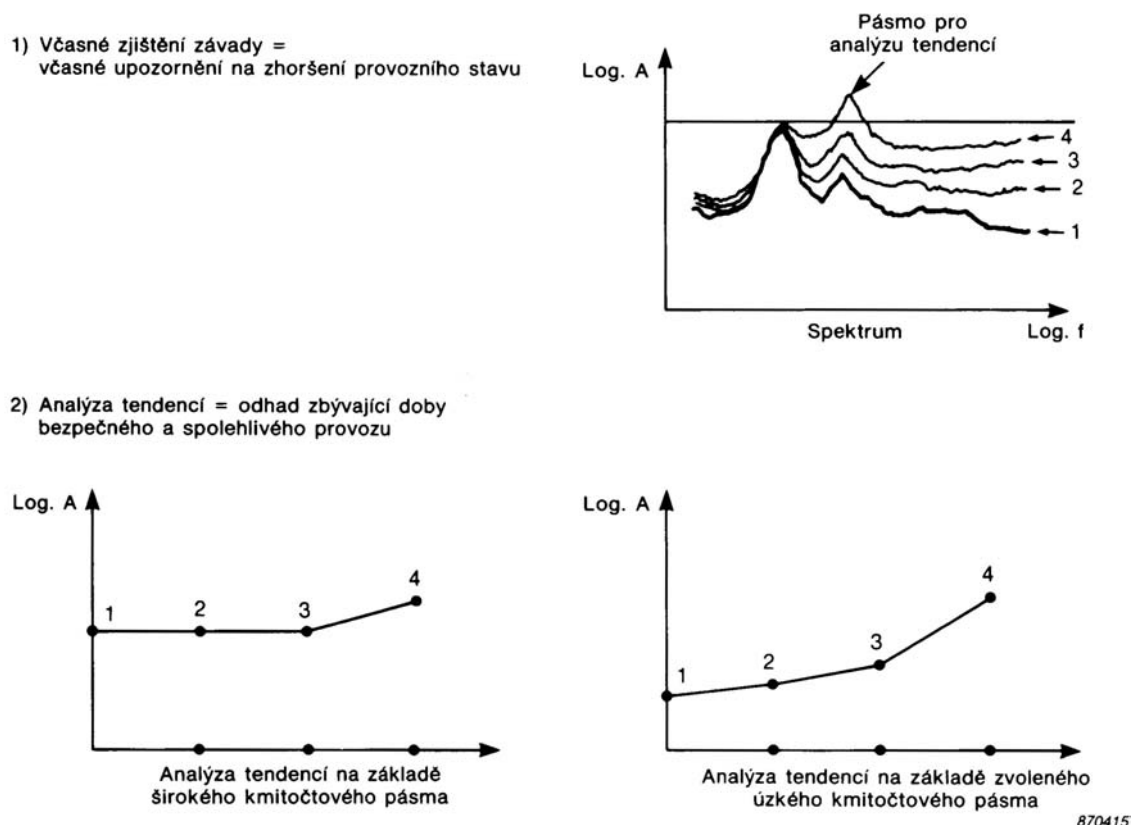


862100

Obr.47. Klasifikace strojů na základě celkových hladin jejich mechanického chvění.

Uvedená metoda naopak neumožňuje zjištění menších závad a závad v počátečním stadiu, např. počátečních vad valivých ložisek a ozubených převodů. Příčina spočívá v tom, že odpovídající složky spekter mechanického chvění jsou maskovány intenzivnějšími složkami v uvedeném kmitočtovém pásmu a příznaky mohou být zjištěny až po příslušném (avšak nežádoucím) zvětšení amplitud odpovídajících složek.

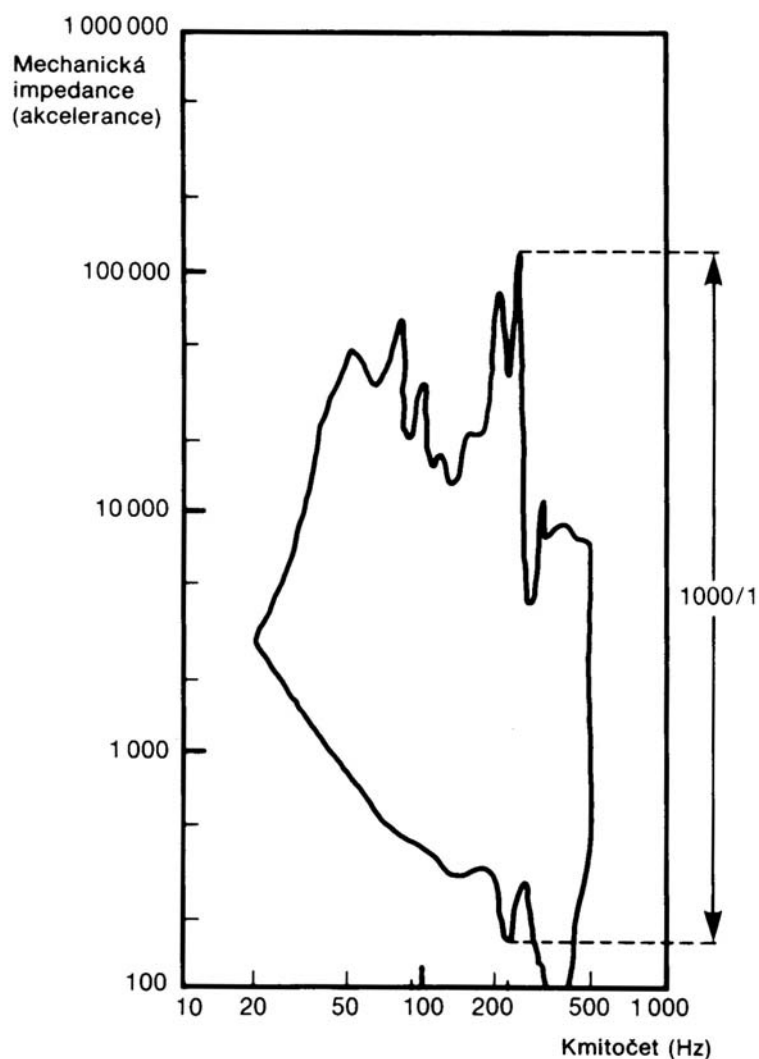
Na základě výsledků měření v širokém kmitočtovém pásmu (např. v pásmu od 10 do 1000 Hz podle ISO) nelze zjistit změny amplitud kmitočtových složek dokud amplituda rostoucí složky nedosáhne hodnoty, odpovídající složce s největší amplitudou v uvažovaném pásmu kmitočtů (viz. obr.48 vlevo dole). Naopak porovnáním odpovídajících spekter je možno zjistit již malé změny, projevující se zvětšením hladin o 3 až 6 dB v úzkých kmitočtových pásmech, a tím získat i včasné upozornění na projev závady v počátečním stadiu (viz. obr.48 vpravo dole).



Obr.48. Časové změny spektra chvění a celkové hladiny mechanického chvění.

Další obtíže s použitím normativně stanovených mezních hodnot mechanického chvění jsou spojeny s přenosovými cestami, kterými se chvění šíří z místa buzení (kroužku valivého ložiska, bodu záběru ozubených kol apod.) do místa, ve kterém se snímá odezva (tj. signál, představující výsledné mechanické chvění). Jestliže charakteristiky těchto přenosových cest nejsou stejné při všech měřeních, tatáž závada (trhlina, jamka apod.) se projeví různě v signálech na výstupu snímače nebo snímačů chvění. Důsledkem je pak nesprávná interpretace a často i neplatný závěr.

Studie, provedená E. Downhamem a R. Woodsem (Účel monitorování chvění točivých strojů v průmyslových závodech s nepřetržitým provozem), plně potvrzuje uvedená tvrzení. Křivky na obr.49 ukazují, že se charakteristiky přenosových cest (v tomto případě průběhy mechanické impedance) obdobných strojních zařízení mohou vzájemně značně odlišovat. Rozdíly mohou být na některých kmitočtech až řádu 1:1000, tj. 60 dB.



Obr.49. Rozsah změn mechanické impedance různých cest šíření chvění.

Z výše uvedeného tedy vyplývá jednoznačný závěr, že pro zjišťování závad pohonových soustav je nezbytné

- porovnání výsledků měření chvění s výsledky předchozích obdobných měření, tj. měření, opakovaných v průběhu určitého časového intervalu (výsledky měření jiných pohonů nebo měření v jiných bodech nemohou včas odhalit projevy změn provozního stavu točivých částí pohonových soustav),
- porovnávání spekter mechanického chvění, jehož pomocí lze včas odhalit změny i méně intenzivních kmitočtových složek.

4.3.1. Analyzátoři založené na rychlé Fourierově transformaci

Po přijetí závěru o tom, že pro včasné zjišťování závad pohonových soustav je nutné porovnávání spekter jejich mechanického chvění, je třeba zvolit vhodné metody a přístrojové vybavení. Přitažlivým se zdá být užití jednokanálového analyzátoru, vybaveného pamětí a umožňujícího porovnávání spektrálních dat. Tato volba však může způsobit řadu obtíží, jak bude popsáno dále.

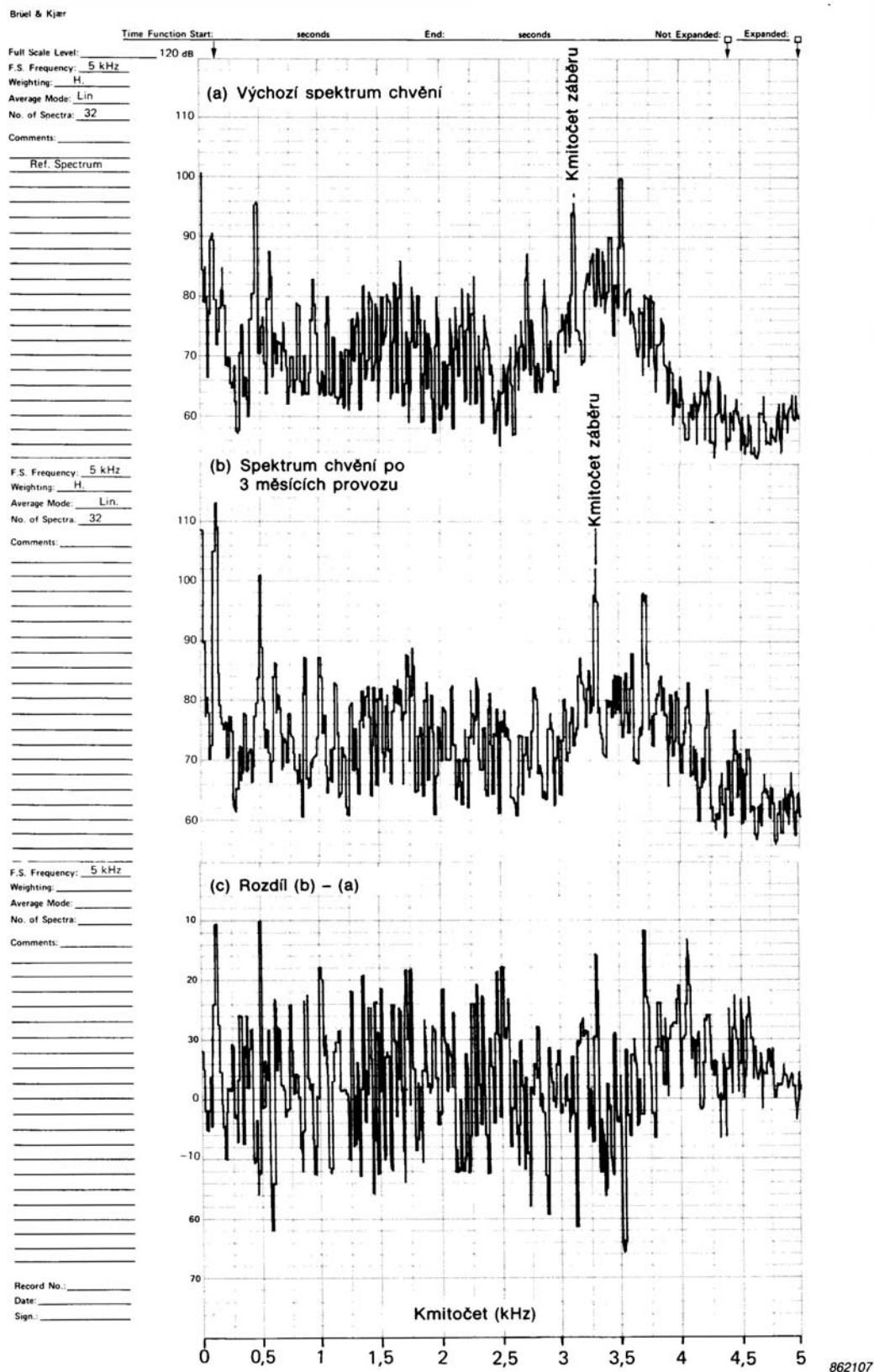
I velmi malé změny pracovní rychlosti (např. rychlosti otáčení) sledovaného zařízení zapříčiňují změny poloh kmitočtových složek spekter mechanického chvění. Při porovnávání takových spekter potom nejsou vyloučeny nesprávné závěry o zdánlivých projevech počínajících závad (viz. obr.50). Možné řešení takového problému spočívá v příslušném *zpracování dat*, tj. v dané situaci ve složení úzkých kmitočtových pásem spekter, získaných rychlou Fourierovou transformací, a vytvoření širších pásem. Změny poloh kmitočtových složek uvnitř takto vytvořených pásem pak neovlivňují celkové hladiny, příslušející těmto pásmům. Spektra, vytvářená popsáním způsobem, se nazývají *syntezovanými spektry*. Je pochopitelné, že kmitočtová pásma syntezevaných spekter musí být dostatečně široká pro podchycení náhodných změn zpracovávaných signálů, avšak současně dostatečně úzká pro zjištění i malých změn závažných kmitočtových složek^{*)}.

V posledních deseti nebo více letech se při analýze mechanického chvění užívaly oktavové propusti. Získávané výsledky byly mnohem lepší než výsledky měření v širokých kmitočtových pásmech. Z předchozího výkladu však plyne, že oktavová pásma jsou příliš široká pro rozlišení závad a obecného opotřebení ozubených převodů a převodovek (viz. poznámka pod čarou). Požadavek větší rozlišovací schopnosti ve kmitočtové oblasti v některých případech splňují třetinooktavové propusti (šířka pásem přibližně 23%).

Jiný problém však přetrvává nezávisle na šířce kmitočtových pásem. Úzké pásmo spektra, získaného rychlou Fourierovou transformací, s vysokou hladinou na okraji širšího pásma syntezevaného spektra prakticky úplně určuje celkovou hladinu, příslušející tomuto širšímu pásmu, avšak i nepatrná (řádu zlomku procenta) změna pracovní rychlosti zkoumané pohonové soustavy při dalším určování spektra mechanického chvění pro porovnávání s předchozím syntezevaným spektrem způsobí přesun uvedené složky do sousedního úzkého kmitočtového pásma. Případný přesun do sousedního širšího pásma syntezevaného spektra je pak provázen výrazným zvýšením příslušné hladiny a možná i chybnou indikací projevu závady sledované pohonové soustavy.

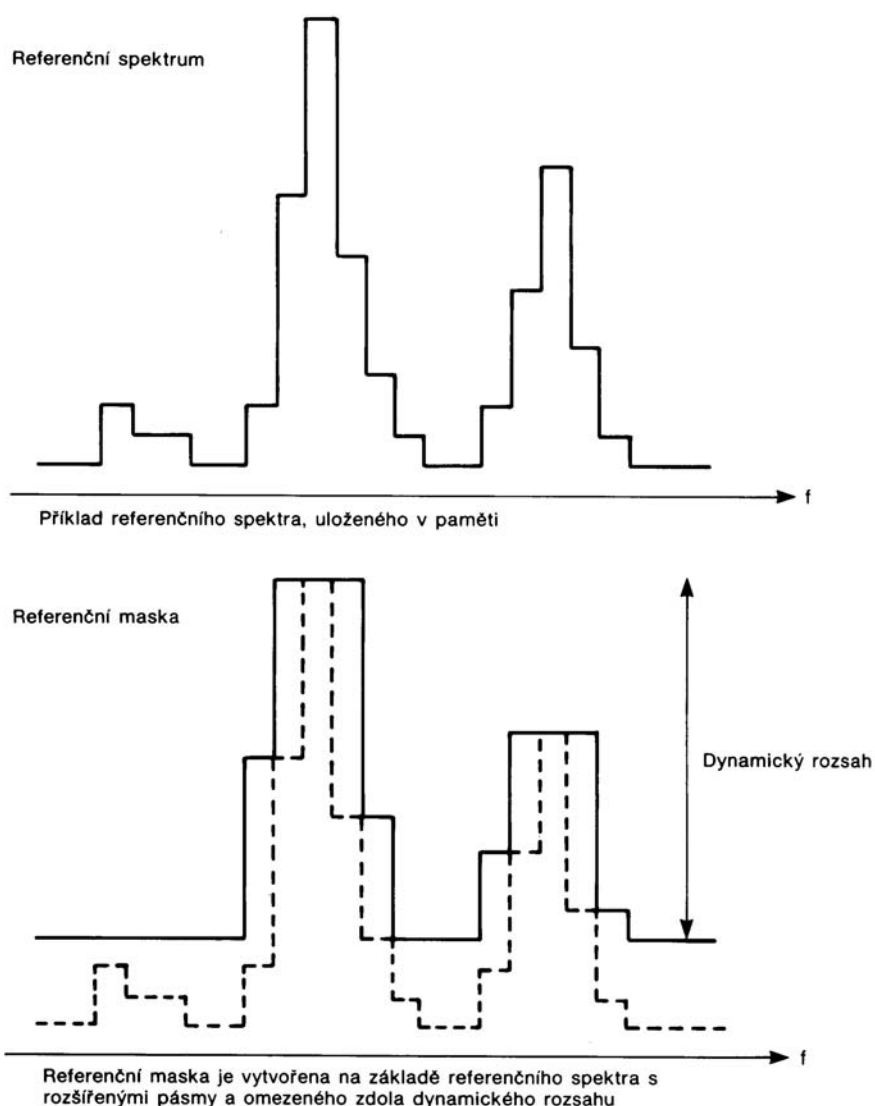
Popsaným obtížím je možno zamezit rozšířením kmitočtových pásem syntezevaných spekter. Výchozí spektrum se stává *referenčním spektrem*, sloužícím jako základ pro vytvoření *referenční masky*. Každému pásmu referenční masky je přidána maximální hodnota z hodnot, příslušejících buď tomuto pásmu nebo jednomu ze sousedních dvou pásem (vytvoření referenční masky lze názorně ukázat pomocí šablony z překližky, vyříznuté ve tvaru referenčního spektra. Šablonu je třeba položit na tenkou vrstvu písku na stole a pak posunout o jedno kmitočtové pásmo doleva a doprava. Otisk v písku po odstranění šablony je totožný s referenční maskou).

^{*)} Výše bylo uvedeno, že závada ozubeného převodu se již v počátečním stadiu projevuje vznikem bočních pásem kolem kmitočtu záběru a vyšších harmonických. Syntezevaná spektra proto musí obsahovat několik kmitočtových pásem mezi kmitočtem záběru a druhou harmonickou, druhou a třetí harmonickou atd. Jinými slovy, několik úzkých pásem v každé oktavě. Úzká kmitočtová pásma musí mít konstantní relativní šířku, tj. každá oktava musí obsahovat stejný počet úzkých kmitočtových pásem.



Obr.50. Odchyly při porovnávání spekter s velmi úzkými kmitočtovými pásmy.

Příklad referenčního spektra a odpovídající referenční masky je znázorněn na obr.51, který současně ilustruje použití dolní meze dynamického rozsahu při konstrukci referenční masky. Dolní mez se zavádí za účelem vyloučení vlivů změn složek s nízkými hladinami a tím i nepravých, tj. klamných, projevů a příznaků závad, způsobených zdroji náhodného šumu, rušením apod. Nová syntezovaná spektra mechanického chvění se pak v dalším porovnávají s referenční maskou, vytvořenou popsaným postupem.



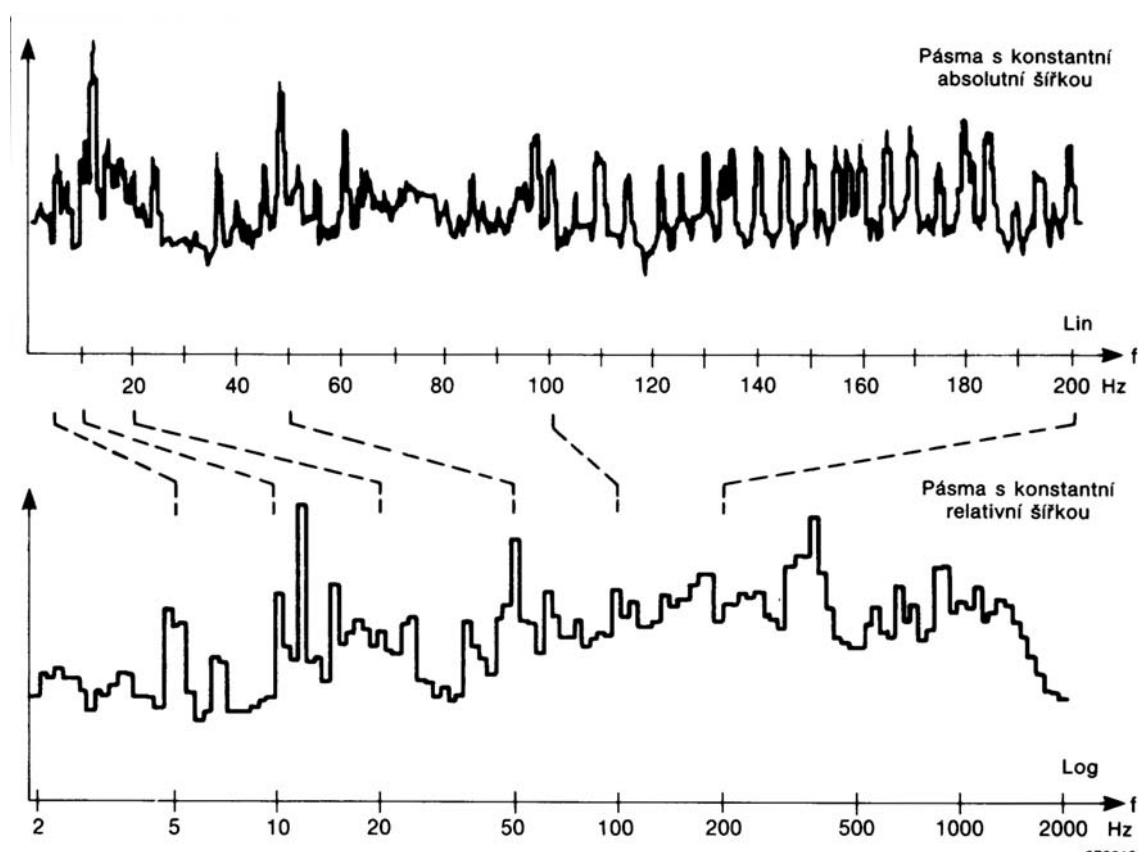
BRUN 7/1

Obr.51. Vytvoření referenční masky na základě referenčního spektra.

Jakékoli převýšení referenční masky složkami nových syntezovaných spekter lze považovat za spolehlivý příznak zvětšující se závady sledované pohonové soustavy. Jelikož šířka pásem referenční masky odpovídá trojnásobku šířky pásem referenčního spektra a požadovaná šířka pásem nesmí být větší než $1/3$ oktávy (23%), výchozí referenční spektrum musí být spektrem s pásmy, jejichž šířka nepřesahuje přibližně 7%.

Pro zajištění kmitočtové rozlišovací schopnosti, lepší než $1/3$ oktávy, tj. rozlišovací schopnosti, při které se mezi dvěma výraznými složkami s odstupem oktávy (např. složkou s kmitočtem záběru a druhou harmonickou) nachází jen jedno nezávislé kmitočtové pásmo, je nezbytné, aby šířka pásem výchozího syntezovaného spektra byla menší než 7%. Za rozumný kompromis se považuje syntetované spektrum s pásmy o šířce 4 až 6%.

Poslední nevyřešený problém souvisí s podstatnými změnami provozní rychlosti sledované pohonové soustavy. Jestliže se pracovní rychlost při provozu sledované pohonové soustavy mění natolik, že posuv kmitočtů spekter chvění přesahuje meze uvažovaných kmitočtových pásem, ani výše popsaná metoda nevyloučí hrubé chyby a omyly při zjišťování závad. Naštěstí se již však od počátku předpokládalo, že syntezovaná spektra jsou spektra s konstantní relativní šířkou pásem (tj. s konstantním poměrem mezních kmitočtů jednotlivých pásem). Změny pracovní nebo provozní rychlosti sledované pohonové soustavy se projevují stejně ve všech takových spektrech (viz. obr.52) tj. relativní posuv kmitočtů zůstává stejný. Například zvětšení rychlosti otáčení hřídelů převodovky o 15% bude provázet zvýšení kmitočtů záběru a kmitočtů všech odpovídajících harmonických o 15%. Odpovídající syntezované spektrum je tedy možné porovnat s referenční maskou, posunutou o 15% směrem k vyšším kmitočtům. Takový posuv zajistí potřebné vyrovnání kmitočtových složek a zcela vyloučí chyby a omyly při porovnávání spekter za účelem zjišťování závad.

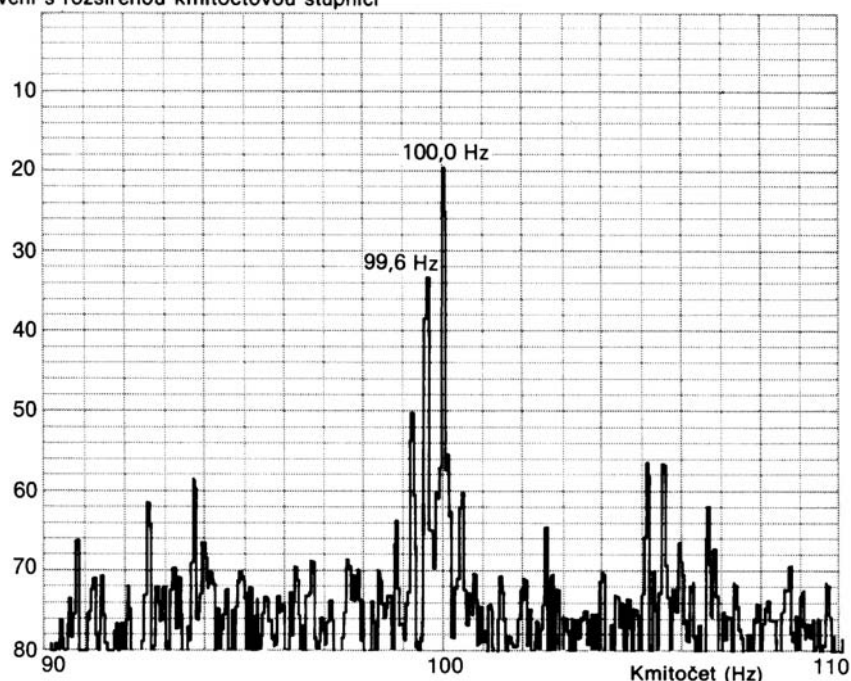


Obr.52. Ilustrace metody syntézy kmitočtového spektra s lineární a logaritmickou kmitočtovou stupnicí.

Avšak ne všechny složky spekter mechanického chvění pohonových soustav jsou závislé na jejich pracovní či provozní rychlosti. K takovým složkám patří již zmíněné mechanické rezonance, v jejichž blízkosti lze zjišťovat závady valivých ložisek. Mechanické rezonance však i v logaritmickém kmitočtovém měřítku zpravidla pokrývají poměrně široká kmitočtová pásma, často pásma o šířce 1/3 oktávy nebo širší. Nevelké změny, provázející kompenzaci změn provozní rychlosti, tedy zpravidla nejsou příčinou hrubých chyb a omylů při zjišťování závad pohonových soustav.

Jiné složky, např. složky s kmitočtem střídavé sítě (50 nebo 60 Hz) a zejména druhé harmonické síťového napětí, jsou často výrazně zastoupeny ve spektrech mechanického chvění pohonových soustav s elektrickými motory. Amplitudy uvedených složek často převládají ve spektrech chvění a nezdědka převyšují amplitudy složky s kmitočtem otáčení a odpovídajících harmonických. Je nutno zdůraznit, že složky s kmitočtem střídavé sítě a harmonických neobsahují vůbec žádnou informaci o provozním stavu příslušných pohonových soustav.

Spektrum chvění s rozšířenou kmitočtovou stupnicí

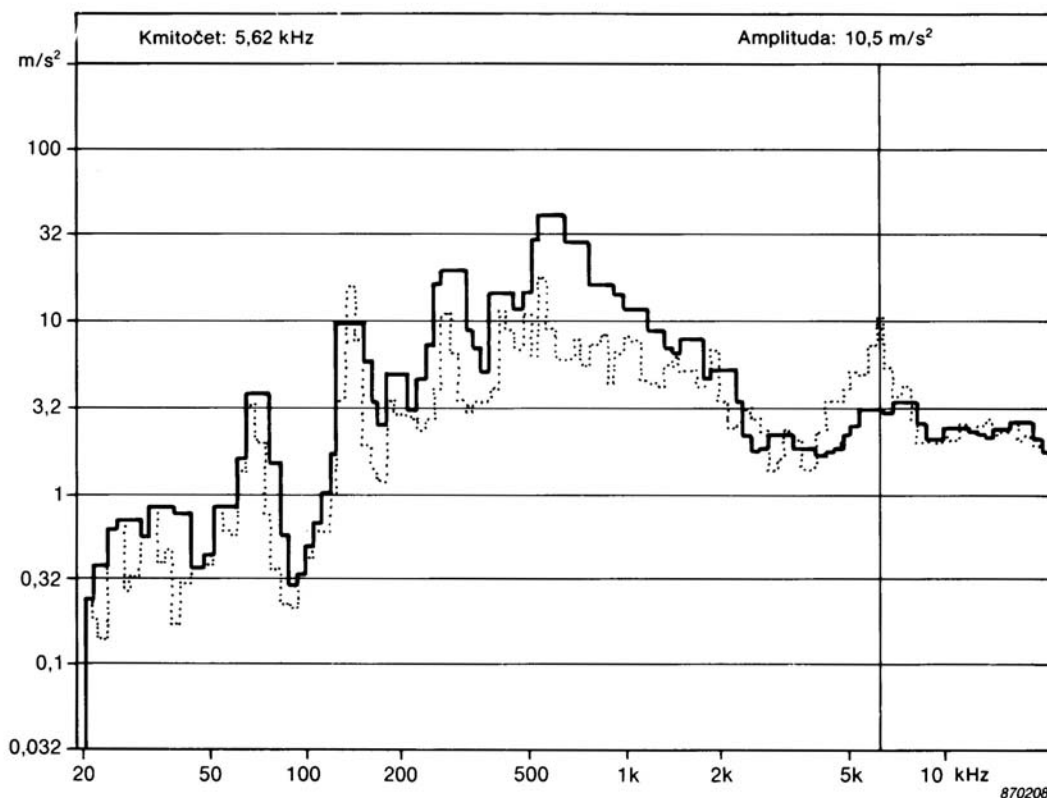


870222

Obr.53. Příklad spektra mechanického chvění dvoupólového elektromotru s kotvou nakrátko.

Z výše uvedeného plyne, že při zjišťování závad pohonových soustav na základě porovnávání spekter jejich mechanického chvění nelze úplně vyloučit riziko chyb a omylů. Při porovnávání spekter s dostatečně úzkými kmitočtovými pásmy lze však zpravidla bezprostředně zjistit a vyloučit většinu možných chyb. V opačném případě, např. v případě malé kmitočtové rozlišovací schopnosti nebo malého odstupu mezi závažnou a problematickou složkou (např. složkami s kmitočty sítě a otáčení elektromotoru s dvoupólovým rotorem nakrátko), je nezbytně nutné provádět podrobnou kmitočtovou analýzu mechanického chvění. Pomocí vhodného analyzátoru, založeného na rychlé Fourierově transformaci, je možné provádět podrobnou úzkopásmovou analýzu a často i analýzu s rozšířením vybraných pásem, obsahujících kritické kmitočtové složky (viz. obr.53).

Na obr.54 je znázorněn příklad se syntezovaným spektrem mechanického chvění, tvořený pásmy o šířce 6%, a se superponovanou referenční maskou. Tento příklad ukazuje, jak se závada kuličkového ložiska již v počátečním stadiu projevuje v oblasti vysokých kmitočtů. Je možné si všimnout, že provedená kompenzace změn rychlosti umožnila zachovat diskrétní složky v kmitočtových mezích užité referenční masky.



Obr.54. Syntezované spektrum s pásmy o šířce 6% a referenční maska, jejíž pásma mají šířku $3 \times 6\%$.

4.4. Diagnostika poruch a závad pohonových soustav

Zjištění zvětšených amplitud složek mechanického chvění (pomocí metod, popsaných výše) musí následovat podrobnější analýza. Prvním krokem je získání úzkopásmových spekter, které pokrývají buď celý uvažovaný kmitočtový rozsah, nebo vybrané rozšířené úseky tohoto rozsahu. Tato spektra musí být pak zhodnocena specialistou s potřebnou kvalifikací a zkušenostmi v oboru údržby pohonových soustav. Po vyloučení možných chyb a omylů (např. v důsledku změn provozní rychlosti apod.), je možné přistoupit k vlastní diagnostice poruch a závad pohonových soustav. Jak již bylo řečeno, kmitočtové pásmo, ve kterém byly zjištěny složky se zvětšenými amplitudami samo o sobě napovídá o tom, jaký druh závady lze očekávat, přičemž

- v oblasti nízkých kmitočtů se projevují závady, vyvolané nevyvážeností, přesazením nebo ohybem hřídelů apod.,

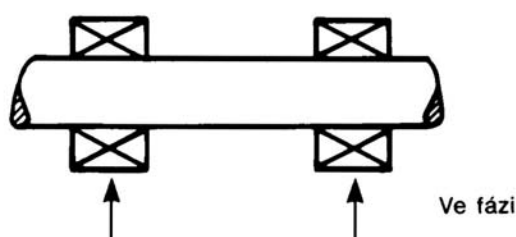
- v oblasti středních kmitočtů se zpravidla projevuje opotřebení a počínající závady ozubených převodů a převodovek a případně i projevy závad, způsobených excentricitou, nerovnostmi a přesazením ozubených kol apod.,
- v oblasti vysokých kmitočtů se projevují závady valivých ložisek (i v počátečních stadiích) a jiné závady, provázené vznikem sledů úzkých a ostrých impulsů či rázů.

Při vlastní diagnostice, sloužící k odhalení závad a jejich příčin, je možné vycházet z výše uvedených skutečností a používat metody, jejichž popisu jsou věnovány následující odstavce.

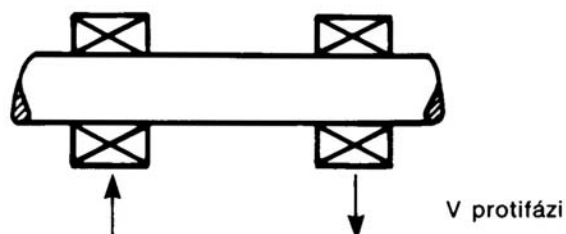
4.4.1. Diagnostika poruch a závad užitím fáze

Fáze je důležitá pro složky s kmitočty, odpovídajícími rychlostem otáčení. Statická nevyváženost je příčinou výrazného radiálního chvění, projevujícího se ve fázi na obou ložiscích rotující součásti (viz. obr.55 nahoře). Dynamická nevyváženost je také provázena radiálním chvěním, které se však na obou ložiscích projevuje v protifázi (viz. obr.55 dole).

1. Statická nevyváženost



2. Dynamická nevyváženost

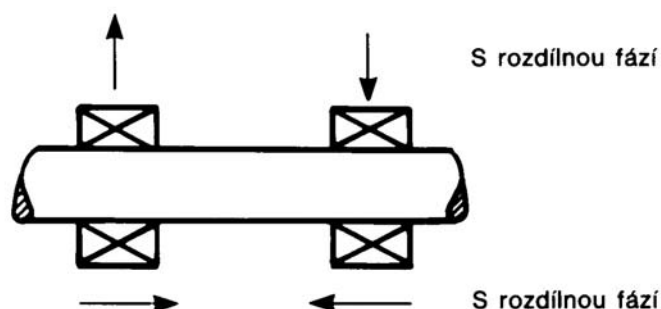


Obr.55. Vliv druhu nevyváženosti na fáze složek s kmitočty, odpovídajícími rychlosti otáčení.

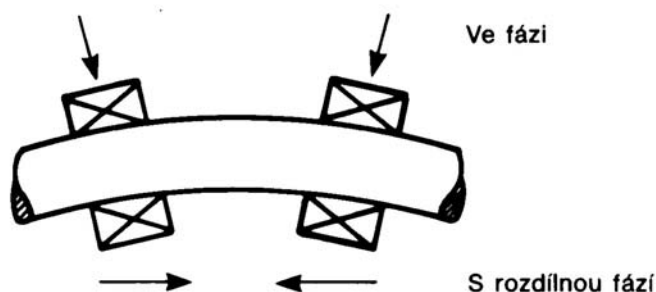
Kývavý pohyb, způsobený jiným zdrojem, vyvolává radiální a axiální chvění s kmitočtem, odpovídajícím rychlosti otáčení. Složky radiálního a axiálního chvění však nejsou vzájemně ve fázi (viz. obr.56 nahoře). Ohyb hřídele je také příčinou vzniku radiálního a axiálního chvění, přičemž radiální chvění je ve fázi na obou ložiscích, kdežto axiální chvění ve fázi není (viz. obr.56 dole).

Výše uvedené závady jsou také velmi často příčinou vzniku vyšších harmonických složek. Vyloučena však není ani nevyváženost, způsobená nelinearitou konstrukce ložisek.

1. Kývavý pohyb



2. Ohyb hřídele

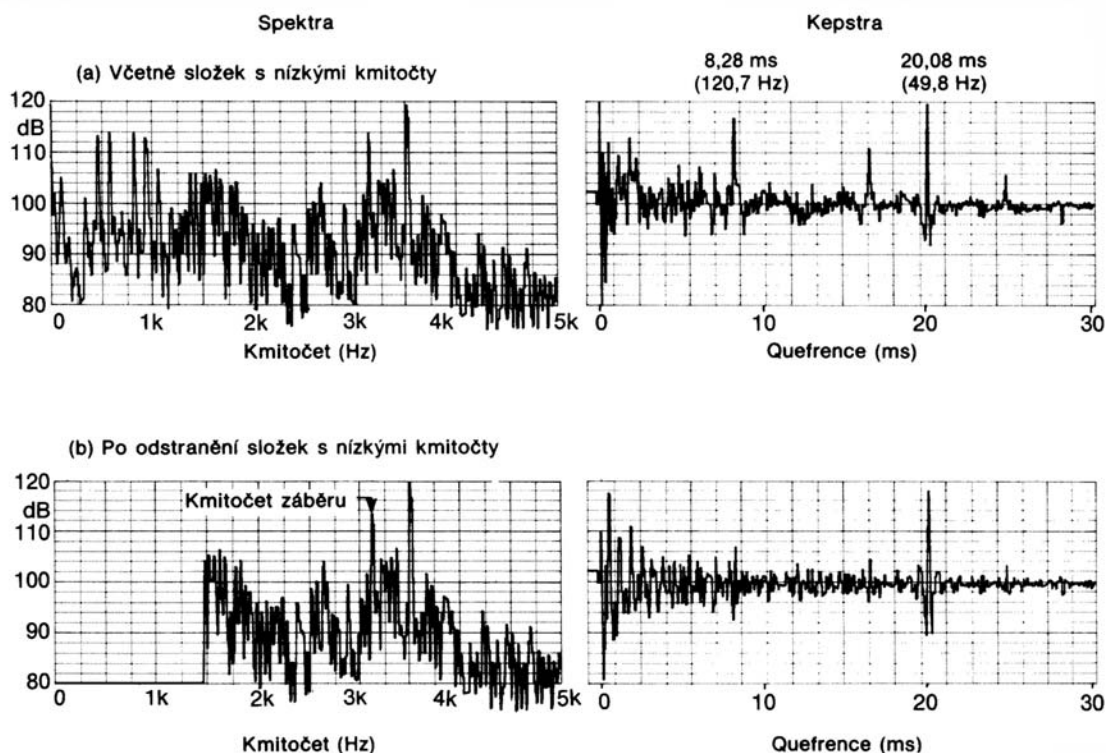


Obr.56. Zjištění kývavých pohybů a ohybu hřídelů na základě fázové informace.

4.4.2. Diagnostika poruch a závad užitím kepster

Pomocí kepster je možné odentifikovat série harmonických nebo bočních pásem, obsažených ve spektrech, a hodnotit jejich relativní intenzity. Výkonová kepstra, užívaná pro diagnostické účely jsou v podstatě výsledky kmitočtové analýzy výsledků kmitočtové analýzy časových průběhů (např. chvění). Sledu pulsů v časové oblasti odpovídají ve kmitočtové oblasti diskrétní složka s opakovacím kmitočtem tohoto sledu a vyšší harmonické, jejichž počet a amplitudy jsou závislé na tvaru opakujících se impulsů.

Zcela analogicky, sadě diskretních složek kmitočtového spektra odpovídá série diskretních složek *kepstra*. Stupnice na ose souřadnic kepstra nese jednotky 1/Hz nebo s. Poloha první složky kepstra je určena převrácenou hodnotou kmitočtového odstupu harmonických složek nebo bočních pásem v odpovídajícím spektru.



Obr.57. Spektrum a kepstrum mechanického chvění opotřebené převodovky.

Příklad, ilustrující kepstrum v kontextu s odpovídajícím spektrem, je uveden na obr.57, kde spektrum mechanického chvění opotřebené převodovky obsahuje řadu diskretních složek a harmonických. Prakticky nelze zjistit, že uvedené spektrum ve skutečnosti obsahuje dvě sady harmonických, související s různými projevy. Odpovídající kepstrum však jasně indikuje přítomnost dvou sad harmonických nebo bočních pásem s odstupy 49,8 a 120,7 Hz (viz. obr.57a).

Totéž spektrum, jehož složky s kmitočty nižšími než polovina kmitočtu záběru byly dodatečně odstraněny, a odpovídající kepstrum jsou znázorněny na obr.57b. Kepstrum, získané na základě upraveného spektra, neobsahuje složku, odpovídající kmitočtovému odstupu 120,7 Hz. Tím je z praktického hlediska prokázáno, že tato složka kepstra souvisí se složkami spektra, nacházejícími se v oblasti nízkých kmitočtů a pravděpodobně způsobenými závadami s projevem právě v tomto kmitočtovém pásmu. Přítomnost složky, odpovídající kmitočtovému odstupu 49,8 Hz, však ukazuje na souvislost s oblastí středních kmitočtů a se závadami, projevujícími se v této oblasti. Je tedy možné usoudit na závadu ozubeného kola s rychlostí otáčení, odpovídající kmitočtu 49,8 Hz.

V případě hřídele s rychlostí otáčení, příslušející kmitočtu 120,7 Hz, se pravděpodobně jedná o nevyváženost nebo jinou závadu, projevující se v oblasti nízkých kmitočtů. Další výhoda kepler spočívá v jejich téměř úplné nezávislosti na fázových vztazích výchozích signálů a na charakteristikách přenosových cest těchto signálů. Například kepra mechanického chvění převodovky, získaná na základě výsledků měření na dvou různých ložiscích jsou prakticky shodná.

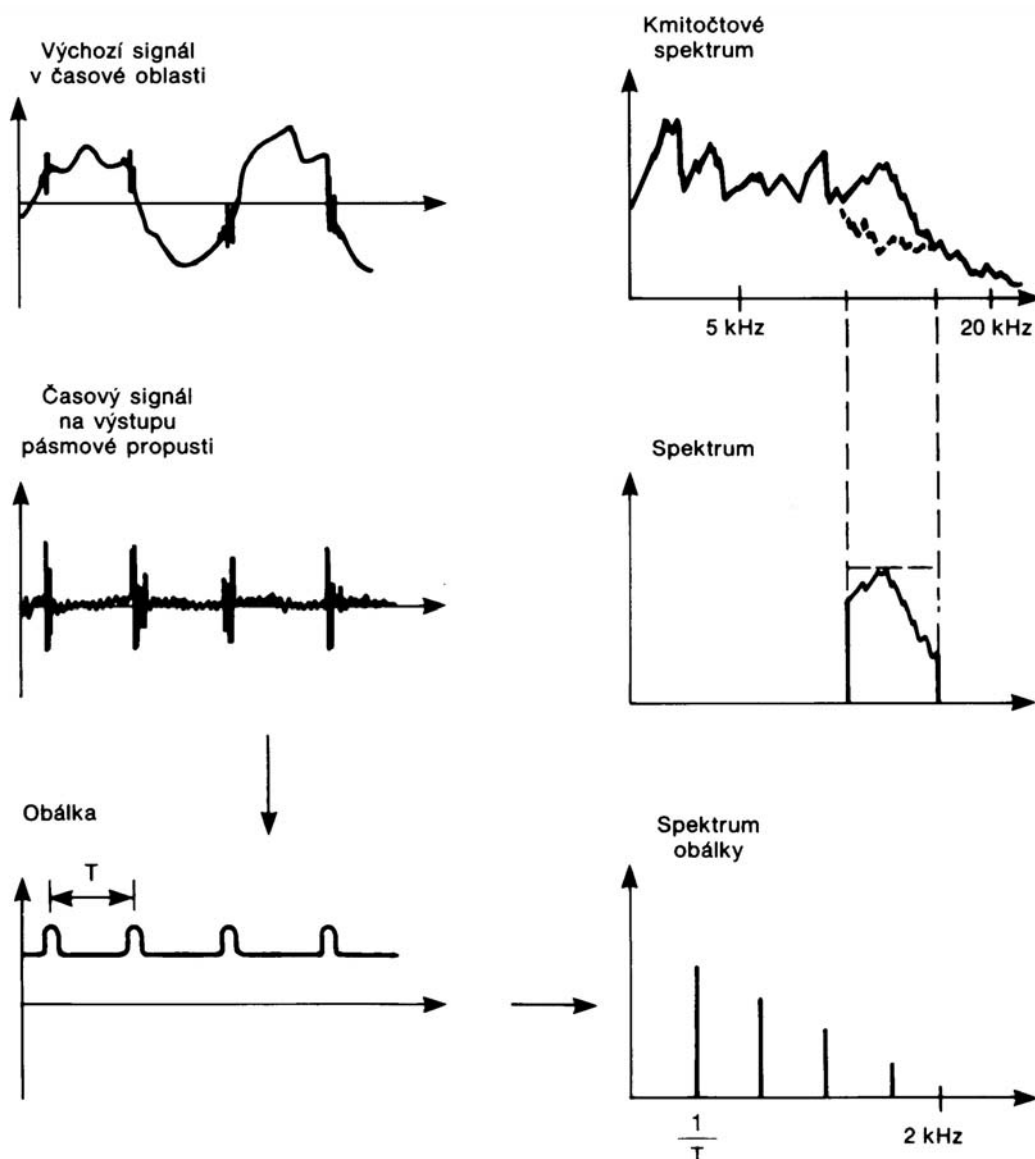
4.4.3. Diagnostika poruch a závad užitím obálky

V předchozím bylo uvedeno, že závada valivého ložiska se již v počátečním stadiu projevuje vznikem sledu ostrých impulsů s poměrně malou kinetickou energií (viz. obr.45). Závadu tohoto druhu lze včas zjistit monitorováním mechanického chvění, zejména pak sledováním změn amplitud složek, odpovídajících mechanickým rezonancím odpovídající pohonové soustavy. Analýzu, nutnou pro odhalení poškozeného ložiska a pro vyloučení jiných možných zdrojů impulsů (např. soustavy tlakového mazání), však nelze provádět pomocí jednoduchého analyzátoru, založeného na rychlé Fourierově transformaci.

Mechanické rezonance, v blízkosti kterých se projevují závady uvedeného druhu, se velmi často nacházejí v oblasti kmitočtů řádu několika kHz. Kmitočty, odpovídající rychlostem otáčení, mohou mít naopak velmi malé hodnoty, např. hodnoty kolem 1-2 Hz. Je pochopitelné, že v takovém případě většina běžných analyzátorů, založených na rychlé Fourierově transformaci, nemá dostatečnou rozlišovací schopnost v potřebném širokém (základním) kmitočtovém rozsahu. Možnost řešení nabízí analýza vybraných a několikanásobně rozšířených úseků uvedeného kmitočtového rozsahu. Zvětšená rozlišovací schopnost při rozšíření kmitočtové stupnice by teoreticky měla umožnit vyhledávání harmonických výchozího sledu impulsů, zesílených při mechanické rezonanci. Tento postup je přijatelný za podmínky absolutní stálosti (stacionarity) analyzovaných signálů, což bývá v praxi zřídka splněno. Změny provozních podmínek, pracovní rychlosti apod. jsou zpravidla příčinou „rozmazávání“ úzkopásmových spekter, příslušejících rozšířeným úsekům kmitočtového rozsahu. Diskrétní složky, odpovídající výchozímu sledu impulsů, potom téměř nelze najít ve shlučích ostatních kmitočtových složek.

Uvedené obtíže lze snadno překonat užitím obálky. Metoda detekce obálky analogovými prostředky bude předmětem dalšího výkladu. Signál v časové oblasti se filtruje pásmovou propustí, překrývající kmitočtové pásmo, ve kterém bylo zjištěno zvětšení amplitud složek monitorovaného spektra (viz. obr.58). Signál na výstupu pásmové propusti obsahuje jen složky s vysokými kmitočty, ke kterým zaručeně patří i chvění, vybuzené impulsy v důsledku závady (např. závady ložiska). Ostatní „maskující“ složky jsou účinně potlačeny.

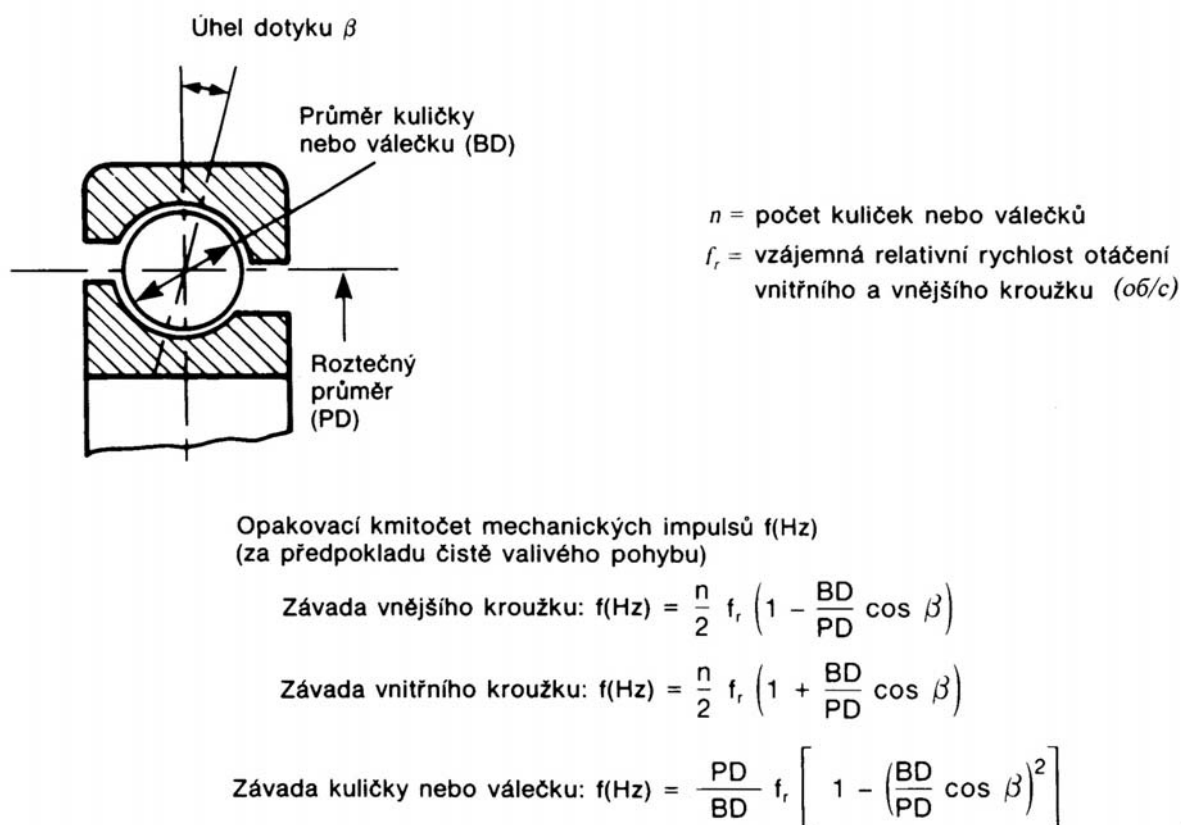
Výstupní signál pásmové propusti se dále zpracovává pomocí usměrňovače s dolní propustí o mezním kmitočtu, který odpovídá přibližně polovině šířky propustného pásma pásmové propusti. Takto zpracovaný signál se v časové oblasti do jisté míry podobá výchozímu signálu se sledem impulsů. Nejdůležitější je však skutečnost, že ve zpracovaném signálu je bezpečně obnoven opakovací kmitočet výchozích impulsů. Tento kmitočet je pak možné přesně stanovit pomocí analyzátoru založeného na rychlé Fourierově transformaci.



Obr.58. Ilustrace základního principu detekce a analýzy obálky.

Hodnoty opakovacího kmitočtu impulsů, odpovídajících závadě vnějšího kroužku, vnitřního kroužku a kuličky nebo válečku valivého ložiska, lze určit výpočtem (viz. obr.59). Porovnáním kmitočtů, zjištěných analyzátozem a výpočtem, lze bezpečně odhalit poškozenou část valivého ložiska. Poznamenejme pouze to, že v důsledku skluzu jsou skutečné kmitočty vždy o něco nižší než kmitočty, stanovené výpočtem pomocí analytických výrazů.

V případě závady otáčejícího se kroužku ložiska je někdy možno bezprostředně zjistit amplitudovou modulaci, způsobenou změnami zatížení v místě poškození. Ve spektru mechanického chvění se amplitudová modulace projevuje bočními pásmy, rozloženými kolem složek s kmitočty, odpovídajícími opakovacímu kmitočtu impulsů a harmonickým, přičemž kmitočtový odstup odpovídá rychlosti otáčení.

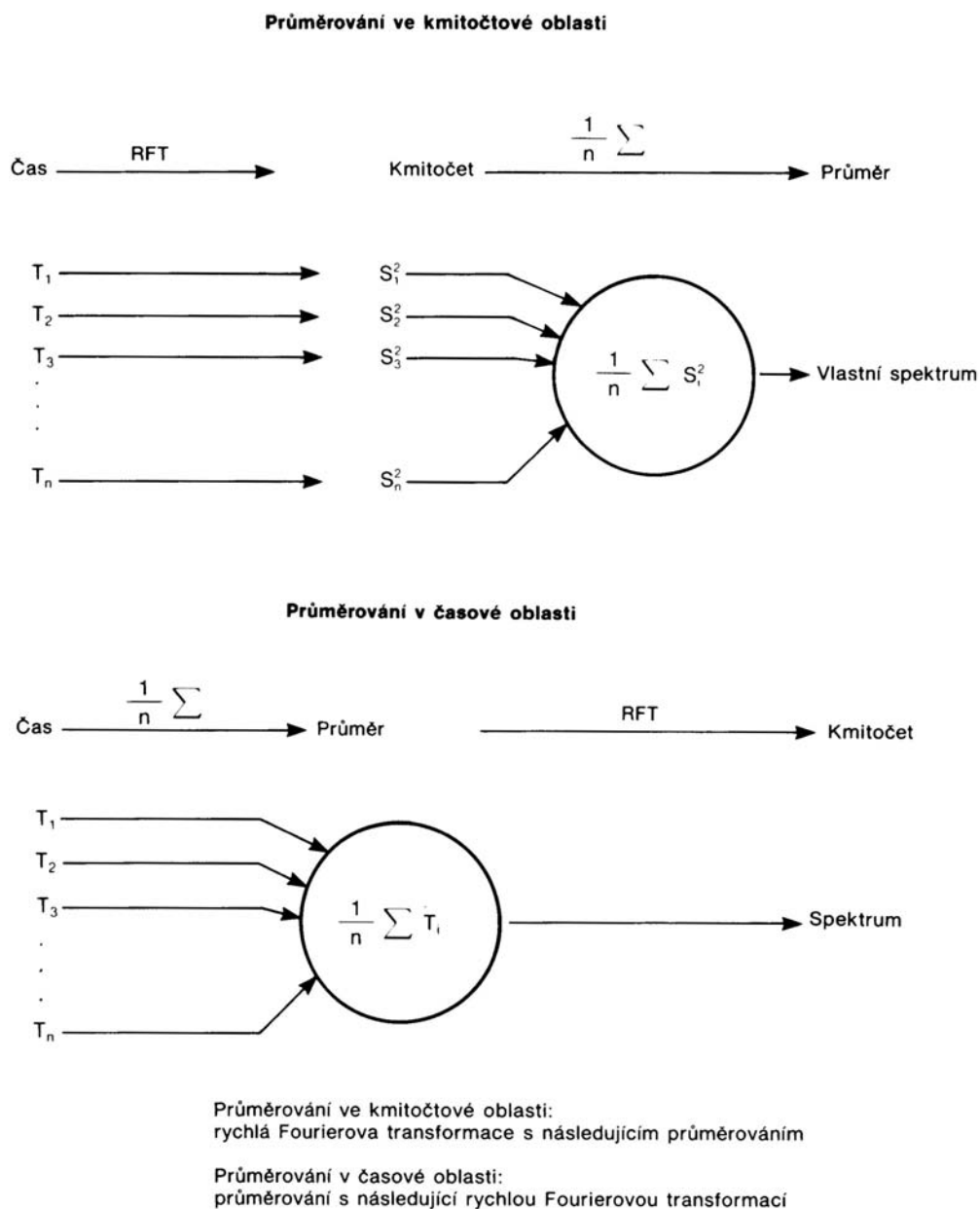


Obr.59. Vzorce pro výpočet opakovacího kmitočtu mechanických impulsů valivého ložiska.

4.4.4. Diagnostika poruch a závad užitím průměrování v čase

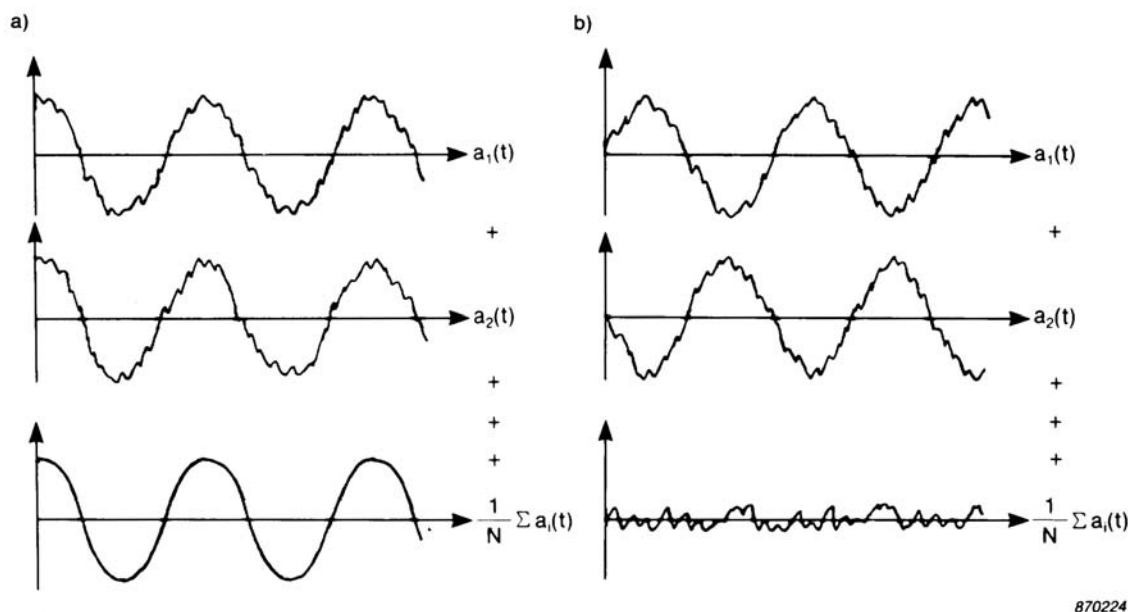
Jiná účinná metoda potlačení nežádoucích složek zkoumaných signálů spočívá v průměrování v časové oblasti. Moderní analyzátory, založené na rychlé Fourierově transformaci, umožňují transformaci jednotlivých realizací v časové oblasti, umocnění získaných výkonových spekter pro určení amplitudových spekter a průměrování určitého počtu amplitudových spekter (viz. obr.60 nahoře). Signál, obsahující určité výrazné složky (např. složky s kmitočty 20 a 33 Hz), má ve výsledném spektru také zastoupeny uvedené složky. Tento závěr plně odpovídá základnímu účelu rychlé Fourierovy transformace.

Při průměrování v časové oblasti (viz. obr.60 dole), prováděné metodou synchronní registrace realizací (např. synchronně se složkou 20 Hz) a aritmetického průměrování ještě před Fourierovou transformací do kmitočtové oblasti, zůstávají synchronní složky a harmonické (zde složka 20 Hz a harmonické) ve fázi, zatím co ostatní složky (zde složka 33 Hz) jsou v důsledku různých fázových úhlů postupně potlačeny.



Obr.60. Ilustrace principů a metod průměrování ve kmitočtové a časové oblasti.

Na obr.61a je znázorněna složka, která byla získána synchronním průměrováním (zde složku 20 Hz), zatím co obr.61b ukazuje, že asynchronní průměrování v časové oblasti eliminuje všechny složky. Jestliže porovnávání spekter mechanického chvění (např. převodovky) indikuje obecné zvětšování amplitud, avšak ani podrobná úzkopásmová analýzy nenabízí jednoznačné řešení, potom průměrování v časové oblasti může být účinnou metodou k nalezení potřebné informace.



Obr.61. Synchronní a asynchronní průměrování v časové oblasti.

Průměrování v časové oblasti je možné považovat za „zvětšovací sklo“ pro mechanické chvění, umožňující „zaostření“ na určitou součást (hřídel, ozubené kolo, valivé ložisko apod.) pro podrobné vyšetření. V případě, že konstrukce pohonové soustavy nám neumožňuje synchronizaci s pohybem vyšetřované součásti (např. vloženého hřídele převodovky), spouštěcí signál, synchronizovaný s jinou součástí (např. vstupním hřídelem převodovky), je nutno vynásobit příslušným koeficientem (v našem případě převodovým poměrem). Takto získaný spouštěcí signál, synchronizovaný s pohybem vyšetřované součásti (zde vložený hřídel převodovky), pak slouží k příslušnému nastavení analyzátoru, tj. k „zaostření“ na vyšetřovanou součást.

Výše popsaná metoda průměrování v časové oblasti prokázala svou účinnost při zjišťování závad a diagnostice převodovek, oddělování signálů elektrického a mechanického původu, potlačování šumu a analýze tvarů vln signálů, např. signálů, odpovídajících chvění pohonových soustav s vratnými pohyby.

4.5. Zjišťování tendencí růstu závad pohonových soustav

Metody zjišťování tendencí se často užívají při monitorování pohonových soustav, i když někdy jen za účelem systematického sledování změn určitého parametru, například tlaku oleje či teploty chladicí vody. Užití těchto metod při monitorování mechanického chvění je poněkud složitější. Výsledkem každodenního rutinního monitorování provozního stavu pohonové soustavy bez závad jsou prakticky neměnná spektra mechanického chvění. Vznik závady se již v počátečním stadiu projevuje náhlým zvětšením amplitudy jedné nebo několika složek uvedených spekter. Zvětšování závady je pak provázeno postupným zvětšováním amplitud mechanického chvění. Takový

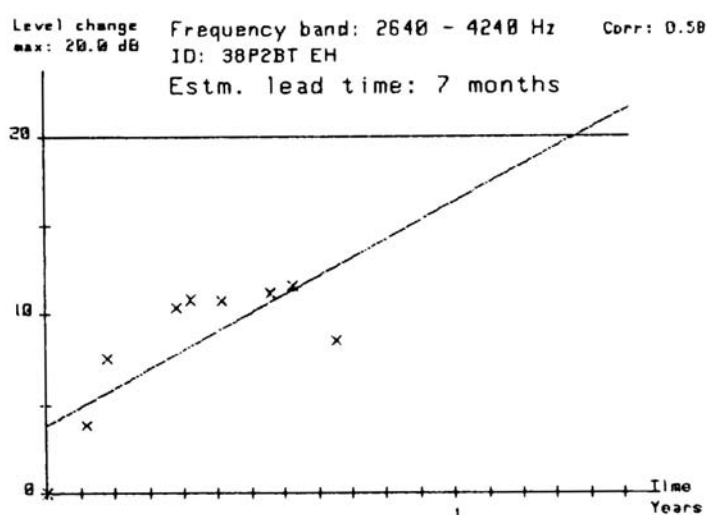
průběh lze očekávat v případě závad valivých ložisek a při normálním opotřebení sledované pohonové soustavy. Vyloučit však nelze ani jiný průběh. Například, vznik víření olejův radiálních ložiscích se sice také projeví zvětšením amplitud některých složek spektru mechanického chvění, avšak takové zvětšování zpravidla není postupné. V tomto případě tedy nelze sledovat postupné zhoršování provozního stavu pohonové soustavy ani odhadnout zbývající dobu jejího bezpečného a spolehlivého provozu.

Jestliže se diagnostickými metodami podaří odhalit druh i příčinu závady a jestliže lze předpokládat její postupný růst (s průvodním postupným zvětšováním amplitud mechanického chvění), potom a jen potom je možné přistoupit k analýze tendencí a odhadu průběhu dalšího provozu sledované pohonové soustavy.

TREND ANALYSIS

First file number: 21
Last file number: 29
Data ID:
Frequency band: 2640 - 4240 Hz

###	Date	ID (first 24 chars)	Level	Comp
21	18/07/81	38P2BT EH	113.9	
22	24/08/81	38P2BT EH	117.8	1 CH
23	11/09/81	38P2BT EH	121.5	
24	12/11/81	38P2BT EH	124.3	1 CH
25	24/11/81	38P2BT EH	124.7	
26	23/12/81	38P2BT EH	124.6	1 CH
27	04/02/82	38P2BT EH	125.1	1 CH
28	25/02/82	38P2BT EH	125.5	2 CH
29	05/04/82	38P2BT EH	122.4	2 CH



Obr.62. Příklad výsledků analýzy tendencí po zjištění a odhalení závady.

Pro analýzu tendencí je třeba zvolit kmitočtové pásmo, ve kterém změny amplitud složek spekter spolehlivě indikují tendenci růstu závady a umožňují odhad zbývajících doby bezpečného a spolehlivého provozu zařízení. Poznamenejme, že takových kmitočtových pásem může být více.

Analýzu tendencí je možné provádět pomocí počítače, používaného při monitorování a porovnávání spekter mechanického chvění. Jsou-li spektra, jejichž složky překročily určité meze, uloženy v paměti počítače spolu s příslušnými referenčními spektry, pak programu analýzy tendencí v příslušném programovém vybavení chybí jen informace o přípustném, z hlediska bezpečnosti a spolehlivosti provozu sledované pohonové soustavy, převýšení určených mezních hodnot. Na obr.62 je znázorněn příklad výsledků analýzy tendencí. Tento příklad názorně ilustruje analýzu tendencí jejíž výsledky jsou pochybné, protože růst závady není postupný ani spojitý, tzn. že odhad zbývajících doby bezpečného provozu (7 měsíců) nelze považovat za spolehlivý.

Při zjišťování tendencí je přirozeně účelné použít všechny dostupné informace, založené na zkušenostech z minulosti. Nejsou-li takové informace k dispozici, potom i dříve velmi rozšířené normy a předpisy, určující maximálně přípustné celkové hodnoty mechanického chvění, mohou být cenným podkladem. Takové normy a předpisy typicky stanoví, že zvětšení celkové amplitudy chvění na 2,5-násobek (zvýšení celkové hladiny o 8 dB) připouští další analýzu a rozbor, zatím co zvětšení na desetinásobek (zvýšení hladiny o 20 dB) vyžaduje okamžitý zásah. Uvedené hodnoty jsou konzervativní a jejich použití je účelné jen do doby získání reálnějších vlastních zkušeností.

Poznámka : Tato kapitola byla zpracována na základě materiálů fy Bruel & Kjaer (zvláštní vydání Technical Review č. TR 1 – 1987)

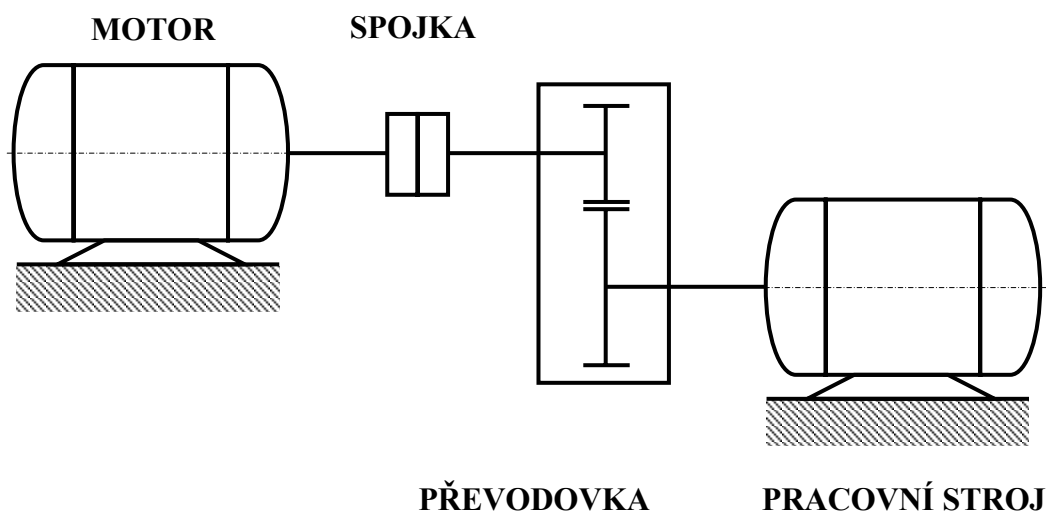
5. Analýza dynamických vlastností pohonových soustav

Pohonové soustavy představují v současné době složité technické soustavy se složitou strukturou zpětných vazeb, které obsahují nejen mechanické, ale i elektrické, hydraulické či pneumatické části. Bezporuchový provoz takovýchto soustav představuje problém, o jehož úspěšném řešení se velmi často rozhoduje zejména v etapě konstrukčního návrhu dané soustavy. Tato skutečnost, spolu s požadavkem na co nejvyšší výkonnost a spolehlivost při současné minimalizaci rozměrů a přívodu a spotřeby energií, vyvolává potřebu vytvoření soustavné metodiky kvalitativní a kvantitativní analýzy dynamických vlastností pohonů, vhodných zejména v etapě projektování daného zařízení.

Cílem této podkapitoly tedy je vytvoření co nejobecnějšího výpočtového modelu projekčního návrhu pohonové soustavy a následná kvalitativní i kvantitativní analýza dynamických vlastností návrhového modelu pohonové soustavy. Z tématického hlediska bude tato podkapitola rozdělena na čtyři články, kde v prvním článku bude odvozen poměrně obecný výpočtový model projekčního návrhu pohonové soustavy, přičemž bude ukázáno, že návrhový model pohonu lze použít i v obecnějších případech za předpokladu splnění určitého kritéria, jehož odvození bude také uvedeno. Druhý článek bude věnován problematice stability rovnovážného stavu pohonu v závislosti na vybrané množině parametrů pohonu, přičemž velká pozornost bude věnována kvalitativnímu rozboru chování pohonové soustavy na hranicích oblastí stability jejího linearizovaného modelu, kde může docházet ke kvalitativním změnám v chování pohonu, projevujícím se vznikem reálných nebo komplexních (Hopfových) bifurkací rovnovážného stavu. Ve třetím článku bude vyšetřována odezva pohonu na harmonický budící signál s konstantní amplitudou a s amplitudou úměrnou kvadrátu úhlové frekvence, přičemž k řešení bude využita asymptotická metoda známá pod názvem „metoda středních hodnot“, která umožňuje získávat i vyšší přiblížení přesného řešení a zároveň poskytuje rovnice potřebné k posouzení stability ustálené odezvy pohonové soustavy na harmonický budící signál. Čtvrtý článek pak bude věnován kvantitativnímu rozboru přechodových dějů probíhajících v pohonové soustavě, přičemž hlavním cílem bude odvození praktických analytických vztahů pro výpočet doby rozběhu a zastavení pohonové soustavy na základě kvadratických aproximací momentových charakteristik motoru a pracovního stroje, které umožňují posoudit vliv použitého typu motoru a pracovního stroje na výslednou dobu trvání přechodových dějů. Je třeba předem upozornit na skutečnost, že zejména obsah třetího článku představuje skutečně základní úvod do problematiky analýzy dynamických vlastností pohonových soustav, jelikož se zabývá podrobně odezvou pohonové soustavy pouze na harmonický budící signál.

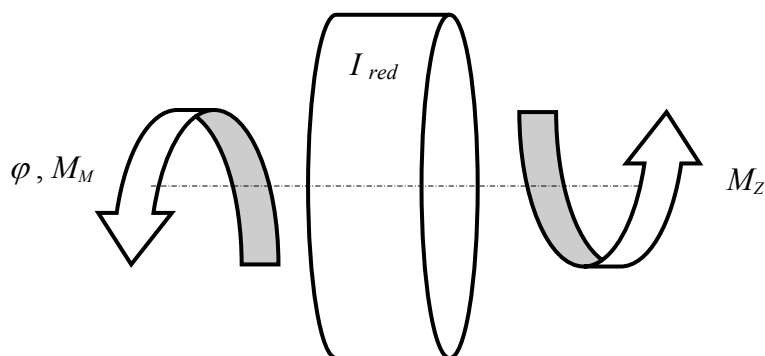
5.1. Výpočtový model pohonu a jeho použitelnost

Uvažujme pohonovou soustavu znázorněnou na obr.63, která představuje pohon „klasického uspořádání“ : motor – spojka – převodový mechanismus – pracovní stroj. Vezmeme-li dále v úvahu skutečnost, že v etapě projekce pohonové soustavy, kdy máme pouze informace o typu pracovního stroje (tj. o momentové charakteristice zatížení), nám jde především o návrh vhodného typu hnacího motoru, pak lze považovat spojovací a převodové prvky pohonu za tuhá tělesa.



Obr.63. Schématické znázornění pohonové soustavy klasického uspořádání.

Za tohoto předpokladu, který je ve skutečnosti v etapě návrhu pohonu způsobován neznalostí tuhostních a tlumících charakteristik jednotlivých spojovacích a převodových prvků, pak lze pro návrhový model pohonu použít modelovou soustavu s tuhými členy, jejíž schématické znázornění je uvedeno na obr.64.



Obr.64. Schématické znázornění modelové soustavy pohonu s tuhými členy .

5.1.1. Výpočtový model pohonové soustavy

Jak již bylo řečeno, jsme víceméně nuceni v etapě návrhu pohonové soustavy (z důvodu neznalosti tuhostních a tlumících charakteristik spojovacích a převodových prvků) použít k analýze dynamických vlastností pohonu modelovou soustavu s tuhými členy (viz. obr.64). Pohybové rovnice, popisující vztah mezi změnou pohybu a silovými účinky pohyb ovlivňujícími, modelové soustavy pohonu s tuhými členy mají, vezmeme-li v úvahu dynamické vlastnosti motoru užitím dynamické momentové charakteristiky, následující tvar

$$I_{red} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{d I_{red}}{d \varphi} \dot{\varphi}^2 = M_M(t) - M_Z(\varphi, \dot{\varphi}), \quad (5.1)$$

$$\tau_M \dot{M}_M(t) + M_M(t) = M_{MS}(\varphi, \dot{\varphi}),$$

kde jednotlivé veličiny, vystupující v těchto rovnicích, mají následující význam :

I_{red}	moment setrvačnosti redukovaný na hřídel motoru,
M_M	hnací moment motoru,
M_{MS}	statická charakteristika motoru,
M_Z	zatěžující moment od rotační pece redukovaný na hřídel motoru,
φ	úhlová výchylka,
τ_M	časová konstanta motoru.

V převážné většině technických aplikací jsou závislosti $I_{red}(\varphi)$, $M_{MS}(\varphi, \dot{\varphi})$ a $M_Z(\varphi, \dot{\varphi})$ periodickými funkcemi úhlu natočení φ s periodou 2π . Za tohoto předpokladu lze závislosti $I_{red}(\varphi)$, $M_{MS}(\varphi, \dot{\varphi})$ a $M_Z(\varphi, \dot{\varphi})$ vyjádřit pomocí Fourierových řad

$$I_{red}(\varphi) = \hat{I}_{red} + \tilde{I}_{red}(\varphi),$$

$$M_{MS}(\varphi, \dot{\varphi}) = \hat{M}_{MS}(\dot{\varphi}) + \tilde{M}_{MS}(\varphi, \dot{\varphi}), \quad (5.2)$$

$$M_Z(\varphi, \dot{\varphi}) = \hat{M}_Z(\dot{\varphi}) + \tilde{M}_Z(\varphi, \dot{\varphi}),$$

tzn. jako součet centrovaných a poruchových (oscilujících) složek, pro které platí

$$\hat{I}_{red} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} I_{red}(\varphi) d\varphi, \quad \tilde{I}_{red}(\varphi) = \sum_{j=1}^m A_j^{red} \cos j\varphi + B_j^{red} \sin j\varphi,$$

$$\hat{M}_{MS}(\dot{\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} M_{MS}(\varphi, \dot{\varphi}) d\varphi, \quad \tilde{M}_{MS}(\varphi, \dot{\varphi}) = \sum_{j=1}^m A_j^M \cos j\varphi + B_j^M \sin j\varphi, \quad (5.3)$$

$$\hat{M}_Z(\dot{\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} M_Z(\varphi, \dot{\varphi}) d\varphi, \quad \tilde{M}_Z(\varphi, \dot{\varphi}) = \sum_{j=1}^m A_j^Z \cos j\varphi + B_j^Z \sin j\varphi,$$

přičemž pro Fourierovy koeficienty jednotlivých řad platí

$$A_j^{red} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} I_{red}(\varphi) \cos j\varphi d\varphi, \quad B_j^{red} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} I_{red}(\varphi) \sin j\varphi d\varphi,$$

$$A_j^M = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} M_{MS}(\varphi, \dot{\varphi}) \cos j\varphi d\varphi, \quad B_j^M = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} M_{MS}(\varphi, \dot{\varphi}) \sin j\varphi d\varphi, \quad (5.4)$$

$$A_j^Z = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} M_Z(\varphi, \dot{\varphi}) \cos j\varphi d\varphi, \quad B_j^Z = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} M_Z(\varphi, \dot{\varphi}) \sin j\varphi d\varphi.$$

Dosadíme-li nyní výrazy (5.2) do vztahů (5.1) a převedeme-li centrované, resp. poruchové složky parametrů na levou, resp. stranu, dostaneme rovnice

$$\hat{I}_{red} \ddot{\varphi} + \hat{M}_Z(\dot{\varphi}) = M_M - \tilde{I}_{red}(\varphi) \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} \frac{d\tilde{I}_{red}(\varphi)}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 - \tilde{M}_Z(\varphi, \dot{\varphi}), \quad (5.5)$$

$$\tau_M \dot{M}_M + M_M - \hat{M}_{MS}(\dot{\varphi}) = \tilde{M}_{MS}(\varphi, \dot{\varphi}).$$

Uvážíme-li však, že také hnací moment motoru M_M obsahuje dvě složky, potom ho lze s ohledem na řešení oscilující kolem rovnovážného stavu

$$\varphi_0 = \omega_0 t \rightarrow \dot{\varphi}_0 = \omega_0 \rightarrow \ddot{\varphi}_0 = 0, \quad (5.6)$$

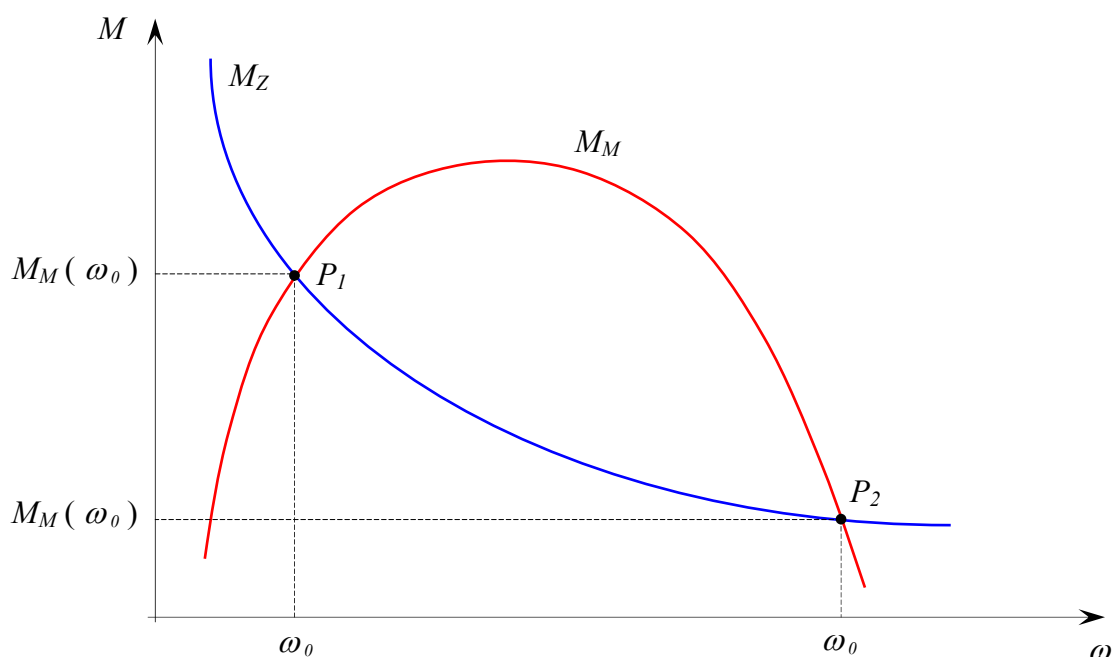
zapsat také jako součet centrované a poruchové složky, tj. ve tvaru

$$M_M = \hat{M}_M(\omega_0) + \tilde{M}_M(t) \rightarrow \dot{M}_M = \tilde{\dot{M}}_M(t). \quad (5.7)$$

Dosazením vztahů (5.6) a (5.7) do pohybových rovnic (5.5), položením poruchových složek rovných nule a po elementárních úpravách obdržíme výraz

$$\hat{M}_{MS}(\omega_0) = \hat{M}_Z(\omega_0) \Rightarrow \omega_0, \quad (5.8)$$

jehož analytickým nebo numerickým řešením obdržíme úhlovou frekvenci ω_0 rovnovážného stavu pohonové soustavy (viz. obr.65). Výraz (5.8) má fyzikální význam, protože představuje podmínku rovnováhy zatěžovacích a hnacích momentů v průběhu jednoho pracovního cyklu. Zároveň nám rovnice (5.8) představuje hledanou matematickou formulaci definice rovnovážného stavu pohonové soustavy. Podle této definice je tedy rovnovážný stav pohonové soustavy definován jakožto průsečík centrované složky statické charakteristiky motoru a centrované složky zatěžujícího momentu pracovního stroje (viz. obr.65).



Obr.65. Grafické znázornění rovnice (4.8) určující rovnovážný stav pohonové soustavy.

Řešení pohybových rovnic (5.5) hledáme ve tvaru

$$\begin{aligned}\varphi &= \omega_0 t + \psi \rightarrow \dot{\varphi} = \omega_0 + \dot{\psi} \rightarrow \ddot{\varphi} = \ddot{\psi}, \\ M_M &= \hat{M}_M(\omega_0) + \tilde{M}_M(t) \rightarrow \dot{M}_M = \dot{\tilde{M}}_M(t),\end{aligned}\quad (5.9)$$

přičemž využijeme metody postupných aproximací, tj. dosadíme do pravých stran soustavy (5.5) řešení (5.6), (5.7) a do levých stran řešení (5.9), tím obdržíme

$$\begin{aligned}\hat{I}_{red} \ddot{\psi} - \hat{M}_M(\omega_0) + \hat{M}_Z(\omega_0 + \dot{\psi}) - \tilde{M}_M &= -\frac{1}{2} \frac{d \tilde{I}_{red}}{d \varphi_0} \omega_0^2 - \tilde{M}_Z(\omega_0 t, \omega_0), \\ \tau_M \dot{\tilde{M}}_M + \hat{M}_M(\omega_0) - \hat{M}_{MS}(\omega_0 + \dot{\psi}) + \tilde{M}_M &= \tilde{M}_{MS}(\omega_0 t, \omega_0).\end{aligned}\quad (5.10)$$

Další postup spočívá v tom, že si centrované složky momentových charakteristik motoru a pracovního stroje, tj. funkce $\hat{M}_Z(\omega_0 + \dot{\psi})$ a $\hat{M}_{MS}(\omega_0 + \dot{\psi})$, za předpokladu, že jsou spojitě a hladké, nahradíme v okolí rovnovážného stavu ω_0 polynomickými závislostmi ve tvaru

$$\hat{M}_Z(\omega_0 + \dot{\psi}) \doteq \hat{M}_Z(\omega_0) + \sum_{k=1}^n \beta_k^Z(\omega_0) \dot{\psi}^k, \quad (5.11a)$$

$$\hat{M}_{MS}(\omega_0 + \dot{\psi}) \doteq \hat{M}_{MS}(\omega_0) + \sum_{k=1}^n \beta_k^M(\omega_0) \dot{\psi}^k, \quad (5.11b)$$

kde koeficienty polynomů $\beta_k^Z(\omega_0)$ a $\beta_k^M(\omega_0)$ určíme některým z následujících postupů :

- Rozvinutím funkcí $\hat{M}_Z(\omega_0 + \dot{\psi})$ a $\hat{M}_{MS}(\omega_0 + \dot{\psi})$ do Taylorových řad v okolí rovnovážného stavu ω_0 . V tomto případě jsou koeficienty $\beta_k^Z(\omega_0)$ a $\beta_k^M(\omega_0)$ definovány výrazy

$$\beta_k^Z(\omega_0) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k \hat{M}_Z(\dot{\varphi})}{d \dot{\varphi}^k} \right]_{\omega_0}, \quad \beta_k^M(\omega_0) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k \hat{M}_{MS}(\dot{\varphi})}{d \dot{\varphi}^k} \right]_{\omega_0}, \quad (5.12)$$

kteří vlastně představují strmosti k -tého řádu momentových charakteristik pracovního stroje a hnacího motoru.

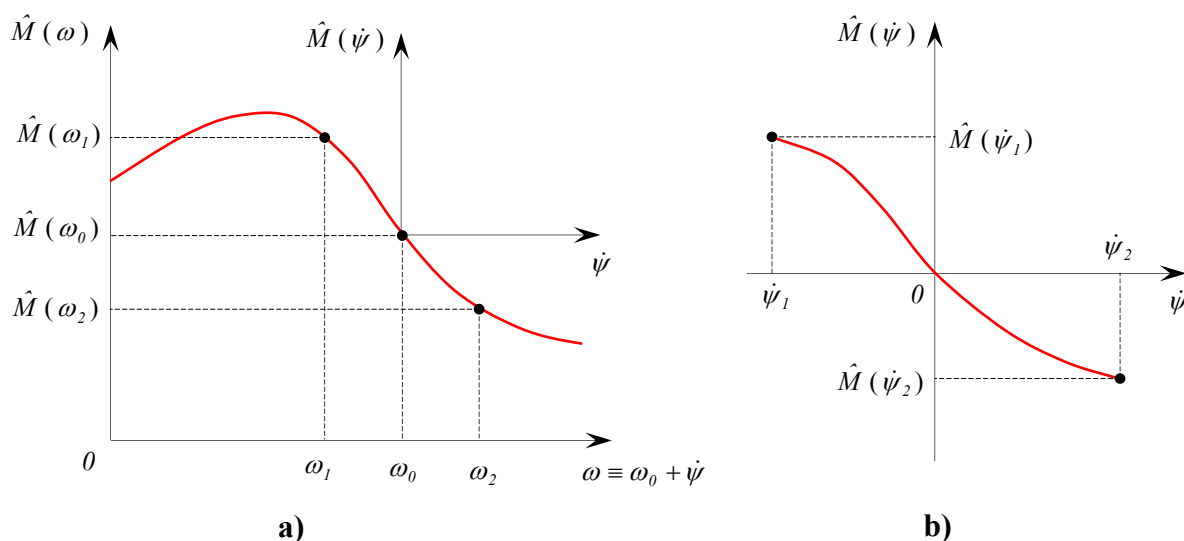
- Koeficienty $\beta_k^Z(\omega_0)$, resp. $\beta_k^M(\omega_0)$ stanovíme z podmínek totožných hodnot momentových charakteristik pracovního stroje, resp. hnacího motoru a jejich polynomických závislostí ve vybraných funkčních bodech.

Nyní si uvedeme obecné výrazy pro koeficienty polynomů $\beta_k^Z(\omega_0)$, resp. $\beta_k^M(\omega_0)$ za předpokladu, že známe směrnici tečny momentové charakteristiky pracovního stroje, resp. hnacího motoru v rovnovážném stavu ω_0 a hodnoty momentových charakteristik pracovního stroje, resp. hnacího motoru ve dvou funkčních bodech ω_1 a ω_2 , což bývá nejčastějším případem ve strojírenské praxi.

Nechť má momentová charakteristika strojního zařízení (pracovního stroje nebo hnacího motoru) závislost na úhlové frekvenci ω znázorněnou na obr.66. Ze vztahů (5.11) tedy plyne, že momentovou charakteristiku daného strojního zařízení lze psát v následujícím tvaru

$$\hat{M}(\omega_0 + \psi) \doteq \hat{M}(\omega_0) + \sum_{k=1}^n \beta_k(\omega_0) \psi^k = \hat{M}_Z(\omega_0) + F(\psi), \quad (5.13)$$

kde funkce $F(\psi)$ je náhradní polynomická závislost (bez absolutního členu). Jelikož máme v našem případě k dispozici tři hodnoty o průběhu momentové charakteristiky daného strojního zařízení v okolí rovnovážného stavu ω_0 (tj. v okolí $\psi = 0$), musí funkce $F(\psi)$ obsahovat tři neurčené koeficienty $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.



Obr.66. Momentová charakteristika a), průběh momentové charakteristiky v okolí rovnovážného stavu b).

To tedy znamená, že funkce $F(\psi)$ je polynomem třetího stupně, který lze zapsat ve tvaru

$$F(\psi) = \sum_{k=1}^3 \beta_k(\omega_0) \psi^k = \beta_1 \psi + \beta_2 \psi^2 + \beta_3 \psi^3, \quad (5.14)$$

přičemž neznámé koeficienty $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ stanovíme z podmínek stejných funkčních hodnot původní a náhradní funkce ve dvou funkčních bodech ω_1, ω_2 a z podmínky totožné směrnice tečny původní a náhradní funkce v rovnovážném stavu ω_0 . Matematicky lze výše uvedené podmínky vyjádřit v následujícím tvaru

$$\omega = \omega_0 : \quad F'(0) = \hat{M}'(\omega_0), \quad (5.15a)$$

$$\omega = \omega_1 : \quad F(\psi_1) = \hat{M}(\omega_0 + \psi_1) - \hat{M}(\omega_0), \quad (5.15b)$$

$$\omega = \omega_2 : \quad F(\psi_2) = \hat{M}(\omega_0 + \psi_2) - \hat{M}(\omega_0), \quad (5.15c)$$

kde výraz $F'(0)$, resp. $\hat{M}'(\omega_0)$ nám označuje derivaci funkce $F(\psi)$ podle proměnné ψ v bodě $\psi = 0$, resp. derivaci funkce $\hat{M}(\omega)$ podle proměnné ω v bodě $\omega = \omega_0$.

Podmínky (5.15a) až (5.15c) představují soustavu tří lineárních algebraických rovnic, jejichž řešením pro koeficienty β_1 , β_2 , β_3 obdržíme výrazy

$$\beta_1 = \hat{M}'(\omega_0) = \left[\frac{d\hat{M}(\omega)}{d\omega} \right]_{\omega_0}, \quad (5.16)$$

$$\beta_2 = \frac{\Delta M_1 \omega_{20}^3 - \Delta M_2 \omega_{10}^3}{\omega_{21} \omega_{10}^2 \omega_{20}^2} - \frac{\omega_{10} + \omega_{20}}{\omega_{10} \omega_{20}} \left[\frac{d\hat{M}(\omega)}{d\omega} \right]_{\omega_0}, \quad (5.17)$$

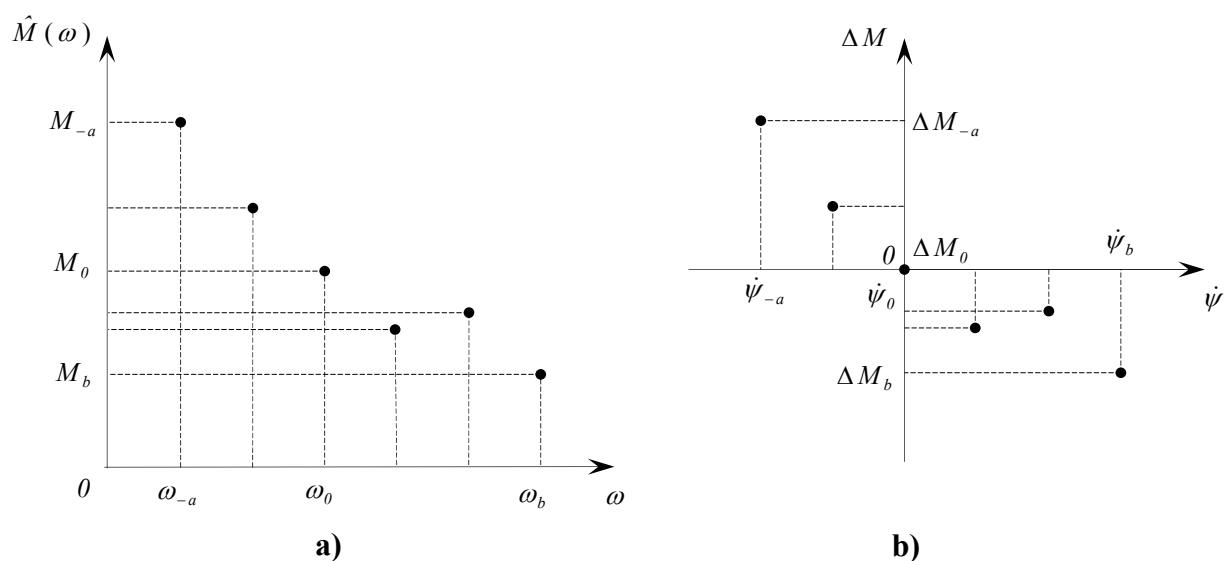
$$\beta_3 = \frac{\Delta M_2 \omega_{10}^2 - \Delta M_1 \omega_{20}^2}{\omega_{21} \omega_{10}^2 \omega_{20}^2} + \frac{1}{\omega_{10} \omega_{20}} \left[\frac{d\hat{M}(\omega)}{d\omega} \right]_{\omega_0}, \quad (5.18)$$

ve který bylo pro zjednodušení zápisu zavedeno následující označení

$$\begin{aligned} \Delta M_1 &= \hat{M}(\omega_1) - \hat{M}(\omega_0), & \Delta M_2 &= \hat{M}(\omega_2) - \hat{M}(\omega_0), \\ \omega_{10} &= \omega_1 - \omega_0, & \omega_{20} &= \omega_2 - \omega_0, & \omega_{21} &= \omega_2 - \omega_1. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Nutno poznamenat, že efektivita naznačeného postupu s rostoucím stupněm polynomu velmi výrazně klesá, takže se pro polynomy šestého a vyššího stupně prakticky neužívá.

- V ostatních případech, tj. v případech kdy závislost momentové charakteristiky strojního zařízení (pracovního stroje, nebo hnacího motoru) na úhlové frekvenci máme určenu tabulkou na základě experimentálních, resp. provozních měření, lze k určení náhradní funkce s výhodou využít postupu založeného na metodě nejmenších čtverců. Metoda nejmenších čtverců dává aproximační (náhradní) funkci, při níž součet čtverců odchylek funkčních hodnot náhradní funkce od experimentálně naměřených hodnot je nejmenší, přičemž náhradní funkci může být v podstatě libovolná funkční závislost. V praktických aplikacích se však v převážné většině případů za náhradní funkci volí polynomická závislost.



Obr.67. Momentová charakteristika a), průběh momentové charakteristiky po transformaci (4.21) b).

Nyní si odvodíme obecně platné vztahy pro výpočet koeficientů náhradní funkce, která má tvar polynomu m -tého stupně, tj. je vyjádřena funkční závislostí

$$F(\psi) = \sum_{k=1}^m \beta_k(\omega_0) \psi^k = \beta_1 \psi + \beta_2 \psi^2 + \dots + \beta_m \psi^m, \quad (5.20)$$

kde $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ jsou neurčené koeficienty, které stanovíme metodou nejmenších čtverců.

Mějme tedy momentovou charakteristiku strojního zařízení (pracovního stroje nebo hnacího motoru) jejíž průběh v okolí rovnovážného stavu máme popsán tabulkou získanou na základě experimentálních, resp. provozních měření (viz. obr.67a), která může vypadat např. takto

ω	ω_{-a}	ω_{-a+1}	ω_0	ω_{b-1}	ω_b
$\hat{M}(\omega)$	M_{-a}	M_{-a+1}	M_0	M_{b-1}	M_b

Zavedeme-li si následující substituci (viz. obr.67b)

$$\Delta M_j = \hat{M}(\omega_j) - \hat{M}(\omega_0), \quad \psi_j = \omega_j - \omega_0, \quad (5.21)$$

pak tabulka naměřených hodnot o průběhu momentové charakteristiky v okolí rovnovážného stavu bude vypadat takto

ψ	ψ_{-a}	ψ_{-a+1}	ψ_0	ψ_{b-1}	ψ_b
ΔM	ΔM_{-a}	ΔM_{-a+1}	ΔM_0	ΔM_{b-1}	ΔM_b

Definujme součet čtverců odchylek funkčních hodnot od experimentálních dat výrazem

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=-a}^b [\hat{M}(\omega_j) - F(\psi_j)]^2 = \\ &= \sum_{j=-a}^b [\Delta M_j - \beta_1 \psi_j - \beta_2 \psi_j^2 - \beta_3 \psi_j^3 - \dots - \beta_m \psi_j^m]^2. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Koeficienty $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ pak určíme z podmínky nejmenšího součtu čtverců odchylek. Aby byl součet čtverců odchylek co nejmenší, tj. aby funkce S nabývala minimální hodnoty, musí být jednotlivé parciální derivace funkce S podle koeficientů $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ rovny nule, tj.

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = \frac{\partial S}{\partial \beta_2} = \frac{\partial S}{\partial \beta_3} = \dots = \frac{\partial S}{\partial \beta_m} = 0. \quad (5.23)$$

Provedeme-li příslušné parciální derivace funkce S podle koeficientů $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, pak po dosazení do (5.23) obdržíme následující soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned}
 \beta_1 \sum_{j=-a}^b \dot{\psi}_j^2 + \beta_2 \sum_{j=-a}^b \dot{\psi}_j^3 + \dots + \beta_m \sum_{j=-a}^b \dot{\psi}_j^{m+1} &= \sum_{j=-a}^b \Delta M_j \dot{\psi}_j, \\
 \beta_1 \sum_{j=-a}^b \dot{\psi}_j^3 + \beta_2 \sum_{j=-a}^b \dot{\psi}_j^4 + \dots + \beta_m \sum_{j=-a}^b \dot{\psi}_j^{m+2} &= \sum_{j=-a}^b \Delta M_j \dot{\psi}_j^2, \\
 \vdots & \\
 \beta_1 \sum_{j=-a}^b \dot{\psi}_j^{m+1} + \beta_2 \sum_{j=-a}^b \dot{\psi}_j^{m+2} + \dots + \beta_m \sum_{j=-a}^b \dot{\psi}_j^{2m} &= \sum_{j=-a}^b \Delta M_j \dot{\psi}_j^m,
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

jehož řešením obdržíme vztahy pro neznámé koeficienty $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$.

Výpočet koeficientů $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ se zjednoduší, platí-li $a = b$ a je-li splněna podmínka

$$\sum_{j=-a}^a \dot{\psi}_j^{2k+1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \tag{5.25}$$

která vyjadřuje skutečnost, že vzdálenost mezi dvěma po sobě jdoucími hodnotami měření ω_j a ω_{j+1} je konstantní, tzn. že platí $\omega_{j+1} - \omega_j = \text{konst.}$ pro $j = -a, -a+1, \dots, a-1$.

Vraťme se však zpět k problematice sestavení pohybových rovnic modelové soustavy pohonu. Dosazením vztahů (5.3) a (5.11) do (5.10), zavedením substituce $\tilde{\omega} = \dot{\psi}$ a s uvážením že v rovnovážném stavu ω_0 platí $\hat{M}_Z(\omega_0) = \hat{M}_{MS}(\omega_0) = \hat{M}_M(\omega_0)$, obdržíme následující systém rovnic

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{red} \ddot{\tilde{\omega}} + \sum_{k=1}^n \beta_k^Z(\omega_0) \tilde{\omega}^k - \tilde{M}_M &= P_I(t) + P_Z(t), \\
 \tau_M \dot{\tilde{M}}_M - \sum_{k=1}^n \beta_k^M(\omega_0) \tilde{\omega}^k + \tilde{M}_M &= P_M(t),
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

který je výpočtovým modelem pohonu s tuhými členy, a kde poruchová funkce momentu setrvačnosti $P_I(t)$, resp. zatěžovacího momentu $P_Z(t)$, resp. hnacího momentu $P_M(t)$ je dána výrazem

$$P_I(t) = \frac{\omega_0^2}{2} \sum_{j=1}^m j A_j^{red} \sin j\omega_0 t - j B_j^{red} \cos j\omega_0 t, \tag{5.27}$$

resp. výrazem

$$P_Z(t) = - \sum_{j=1}^m A_j^Z(\omega_0) \cos j\omega_0 t - B_j^Z(\omega_0) \sin j\omega_0 t, \tag{5.28}$$

resp. výrazem

$$P_M(t) = \sum_{j=1}^m A_j^M(\omega_0) \cos j\omega_0 t - B_j^M(\omega_0) \sin j\omega_0 t. \tag{5.29}$$

5.1.2. Kritérium použitelnosti modelové soustavy pohonu

Modelovou soustavu pohonu s tuhými členy, vhodnou pro etapu projekce pohonové soustavy, lze však použít i jiných praktických případech. Pro stanovení podmínek praktické použitelnosti modelové soustavy pohonu s tuhými členy, jakožto výpočtového modelu reálných pohonových soustav, vyjdeme z kvalitativního rozboru chování dynamického systému o jednom stupni volnosti pod účinkem harmonicky proměnného signálu, který je popsán obyčejnou lineární diferenciální rovnicí 2. řádu ve tvaru

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \Omega_0^2 q = Q \cos \omega t, \quad (5.30)$$

kde veličiny vystupující v této rovnici mají následující význam:

- q výstupní signál,
- δ součinitel doznívání,
- Ω_0 vlastní úhlová frekvence netlumeného kmitání,
- Q amplituda vstupního harmonicky proměnného signálu,
- ω úhlová frekvence vstupního harmonicky proměnného signálu.

Z teorie lineárních diferenciálních rovnic je známo, že obecné řešení rovnice (5.30) se skládá z řešení homogenní rovnice (s nulovou pravou stranou) a z řešení partikulárního:

$$q = q_H + q_P. \quad (5.31)$$

Omezíme-li se na v praxi nejčastěji vyskytující se případ podkritického tlumení, kdy platí $\delta < \Omega_0$, lze obecné řešení (5.31) diferenciální rovnice (5.30) psát ve tvaru

$$q = C e^{-\delta t} \sin(\Omega t + \varphi_0) + A \sin(\omega t - \varphi), \quad (5.32)$$

kde C, φ_0 jsou integrační konstanty, které se určí z počátečních podmínek, a kde $\Omega^2 = \Omega_0^2 - \delta^2$ je vlastní úhlová frekvence tlumeného kmitání. Amplitudu A a fázový úhel φ ustáleného vynuceného kmitání určíme ze vztahů:

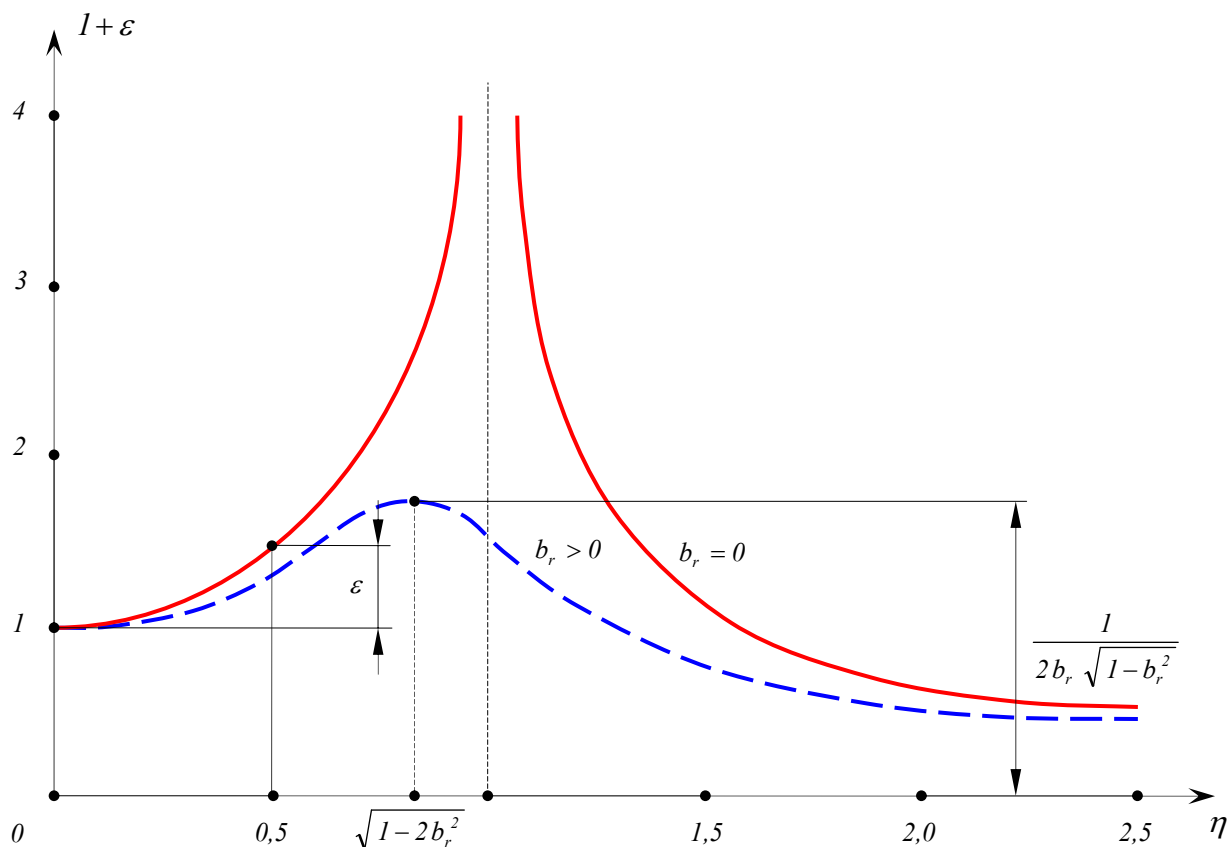
$$\frac{A}{A_{ST}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2b_r\eta)^2}}, \quad (5.33a)$$

$$\varphi = \arctg \frac{2b_r\eta}{1 - \eta^2}, \quad (5.33b)$$

kde součinitel kritického útlumu b_r a činitel naladění η jsou definovány následujícími výrazy

$$b_r = \frac{\delta}{\Omega_0}, \quad \eta = \frac{\omega}{\Omega_0}. \quad (5.34)$$

Ze vztahu (5.32) vyplývá, že pro $\delta > 0$ se první výraz na pravé straně s rostoucím časem zmenšuje k nule, tzn. že po určité dostatečně dlouhé době je obecné řešení (5.32) diferenciální rovnice (5.30) prakticky určenou pouze partikulárním integrálem. Znázorníme-li si nyní graficky rovnici (5.33a), obdržíme křivku znázorněnou na obr.68 (tučná přerušovaná čára je pro systém s tlumením, tučná plná čára potom pro systém bez tlumení) která se nazývá amplitudová frekvenční charakteristika.



Obr.68. Průběh amplitudových frekvenčních křivek definovaných rovnicí (5.33a).

Z průběhu amplitudových křivek je zřejmé, že v blízkém okolí nulové hodnoty činitele naladění η se chování dynamického systému s pružnými a tlumícími vazbami prakticky neliší od chování systému bez pružných a tlumících vazeb.

Zabývejme se proto nyní otázkou sestavení určitého kvantitativního kriteriálního vztahu, který by nám sloužil k posouzení praktické použitelnosti dynamického systému bez pružných a tlumících vazeb jako modelu reálného dynamického systému. Za tím účelem si upravme výraz (5.33a) pro amplitudovou frekvenční charakteristiku do tvaru

$$\frac{A}{A_{ST}} \equiv \frac{A_{ST} + \Delta A}{A_{ST}} \equiv I + \varepsilon = \frac{I}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2b_r\eta)^2}}, \quad (5.35)$$

kde veličina ε vyjadřuje procentuální odchylku amplitudy A ustálených vynucených kmitů vzhledem ke statické výchylce A_{ST} . Uvážíme-li navíc, že přítomnost tlumení v systému má za následek snížení amplitudy A ustálených vynucených kmitů, pak nejméně příznivé okolnosti, vzhledem k velikosti procentuální odchylky ε při dané frekvenci buzení ω pro systém bez tlumení a s tlumením, nastávají u systému bez tlumení (tj. pro $b_r = 0$), jak je také patrné z obr.68. Z toho tedy plyne, že místo rovnice (5.35) budeme analyzovat rovnici

$$\frac{A_{ST} + \Delta A}{A_{ST}} \equiv 1 + \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2}}. \quad (5.36)$$

Úpravou rovnice (5.36) obdržíme bikvadratickou rovnici pro činitel naladění η ve tvaru

$$\eta^4 - 2\eta^2 + 1 - \left[\frac{1}{1 + \varepsilon} \right]^2 = 0,$$

jejímž řešením obdržíme pro činitel naladění η následující výraz (zajímá nás pouze řešení, které se nachází v blízkém okolí nuly)

$$\eta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}} \quad (5.37)$$

který závisí pouze na velikosti procentuální odchylky ε . Dosadíme-li nyní do této rovnice za činitel naladění η výraz (5.34), pak po elementární úpravě obdržíme vztah mezi frekvencí buzení ω , velikostí procentuální odchylky ε a vlastní úhlovou frekvencí netlumeného kmitání Ω_0 ve tvaru

$$\frac{\omega}{\Omega_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}} \Rightarrow \omega = \Omega_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}}, \quad (5.38)$$

odtud pak obdržíme podmínku praktické použitelnosti modelu dynamického systému bez pružných a tlumících vazeb, pro danou velikost procentuální odchylky ε , v následujícím tvaru

$$\frac{\omega}{\Omega_0} \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}} \Rightarrow \omega \leq \Omega_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}}. \quad (5.39)$$

Vezmeme-li, ve strojírenské praxi běžný požadavek, maximálně 5-ti procentní chybu (tj. $\varepsilon = 0,05$), pak po dosazení do (5.39) dostaneme pro velikost budící frekvence podmínku

$$\omega \leq \frac{\Omega_0}{\sqrt{21}} \doteq 0,22 \Omega_0 \approx \frac{\Omega_0}{5}, \quad (5.40)$$

která nám vlastně představuje hledané **kritérium praktické použitelnosti** modelu dynamického systému bez pružných a tlumících vazeb.

Zcela analogicky lze ukázat, že pro dynamický systém o n -stupních volnosti s vlastními úhlovými frekvencemi netlumeného kmitání $\Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_n$, na který působí m harmonicky proměnných signálů s budícími frekvencemi $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_m$, platí kritérium (5.11) ve tvaru

$$\omega_m \leq 0,22 \Omega_1 \approx \frac{\Omega_1}{5}. \quad (5.41)$$

Na základě výše uvedeného rozboru lze vyslovit následující tvrzení o praktické použitelnosti modelové soustavy pohonu s tuhými členy : **Modelovou soustavu pohonu s tuhými členy lze prakticky použít nejen pro modelování reálné pohonové soustavy v etapě jejího návrhu, ale ve všech případech, kdy nejvyšší frekvence budících účinků, které jsme se rozhodli ještě respektovat, je více jak pětkrát menší než nejnižší (základní) vlastní úhlová frekvence netlumeného kmitání pohonové soustavy.**

5.2. Stabilita a bifurkace rovnovážných stavů

Jelikož obecně platí, že podmínky stability rovnovážného stavu vlivem poruch počátečních podmínek bývají totožné s podmínkami stability rovnovážného stavu vlivem poruchových funkcí, omezíme se v dalším na zkoumání podmínek stability rovnovážného stavu vlivem poruch počátečních podmínek, tj. budeme vyšetřovat stabilitu rovnovážného stavu soustavy

$$\begin{aligned} \hat{I}_{red} \ddot{\tilde{\omega}} + \sum_{k=1}^n \beta_k^Z(\omega_0) \tilde{\omega}^k - \tilde{M}_M &= 0, \\ \tau_M \dot{\tilde{M}}_M - \sum_{k=1}^n \beta_k^M(\omega_0) \tilde{\omega}^k + \tilde{M}_M &= 0, \end{aligned} \quad (5.42)$$

při odchylkách počátečních podmínek od nuly, tj.

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(0) &= \tilde{\omega}_0 \neq 0, \\ \tilde{M}_M(0) &= \tilde{M}_0 \neq 0. \end{aligned} \quad (5.43)$$

K vyšetřování stability rovnovážného stavu lze v zásadě použít dvou rozdílných přístupů. První přístup, nazývaný také přímá Ljapunovova metoda, spočívá v nalezení tzv. Ljapunovovy funkce systému, která je pozitivně definitní a zároveň její časová derivace je negativně definitní. Podaří-li se nám takovou funkci pro soustavu (5.42) sestavit, potom rovnovážný stav dané soustavy je asymptoticky stabilní, přičemž je třeba zdůraznit skutečnost, že nepodaří-li se nám Ljapunovovu funkci systému sestavit, pak to nutně neznamená, že rovnovážný stav soustavy (5.42) je nestabilní, ale můžeme pouze konstatovat, že pokus o sestavení Ljapunovovy funkce systému se nezdařil. Hlavní výhoda přímé Ljapunovovy metody určování stability rovnovážného stavu leží v její obecnosti, protože omezení na funkce vystupující v pohybových rovnicích jsou velmi slabá (existence a jednoznačnost řešení pohybových rovnic). Nevýhodou této metody pak je, že neexistuje obecný návod pro sestavení Ljapunovovy funkce. Z hlediska praktické použitelnosti je však nejdůležitější skutečnost, že podmínky stability podle přímé Ljapunovovy metody, jsou pouze **postačujícími** podmínkami stability, nikoli nutnými a postačujícími. To má při praktické aplikaci za následek to, že i když se nám podaří sestavit Ljapunovovu funkci systému a na základě této funkce stanovit mezní parametry zaručující stabilitu rovnovážného stavu, pak to neznamená, že pro parametry překračující tyto meze bude rovnovážný stav nestabilní. Z tohoto důvodu bude k posouzení stability rovnovážného stavu soustavy (5.42) použito druhého přístupu, nazývaného první Ljapunovova metoda, resp. metoda charakteristických exponentů. Tento přístup, velmi často používaný v technické praxi, je použitelný prakticky pro všechny soustavy s analytickými nelinearitami vyhovující podmínce

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{g}(t, \mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = \mathbf{0}, \quad (5.44)$$

kde $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ je reálná vektorová funkce, tj. vektor nelineárních funkcí soustavy. Princip první Ljapunovovy metody, spočívá v linearizaci nelineárních diferenciálních pohybových rovnic v okolí rovnovážného stavu. Pro linearizovaný systém pohybových rovnic pak sestavíme charakteristickou rovnici a podle povahy kořenů charakteristické rovnice pak usuzujeme na stabilitu rovnovážného stavu soustavy, přičemž platí následující tvrzení: Rovnovážný stav soustavy (5.42) je asymptoticky

Ljapunovsky stabilní, resp. Ljapunovsky nestabilní tehdy a jen tehdy mají-li všechny kořeny charakteristické rovnice záporné, resp. kladné reálné části. V případě kořenů s nulovou reálnou částí nelze o stabilitě rovnovážného stavu na základě první Ljapunovovy metody rozhodnout. V tomto případě lze o stabilitě rovnovážného stavu rozhodnout na základě bifurkační teorie. Hlavní výhodou první Ljapunovovy metody záleží v tom, že její použití pro posouzení stability rovnovážného stavu je poměrně velmi jednoduché, protože pro posouzení povahy kořenů charakteristické rovnice byla vypracována celá řada efektivních algebraických kritérií (Hurwitzovo kritérium nebo Routhovo-Shurovo kritérium stability) nebo frekvenčních kritérií (Nyquistovo kritérium nebo Michajlovovo kritérium stability) bez nutnosti řešení dané charakteristické rovnice. Nevýhodou výše uvedeného postupu pak je, že ho lze použít pouze pro spojité a hladké nelineární funkce vyhovující podmínce (5.44), přičemž získané výsledky mají lokální charakter, tzn. že platí v dostatečně blízkém okolí rovnovážného stavu.

Podle první Ljapunovovy metody, nazývané také metoda charakteristických exponentů, je tedy rovnovážný stav soustavy (5.42) asymptoticky Ljapunovsky stabilní tehdy, jestliže vlastní čísla charakteristické rovnice linearizovaného systému pohybových rovnic mají záporné reálné části. Zabývejme se proto nyní problematikou sestavení podmínek stability rovnovážného stavu podle první Ljapunovovy metody pro modelovou soustavu pohonu s tuhými členy, jejíž pohyb je popsán soustavou diferenciálních rovnic (5.42). Za tím účelem si zavedeme nové proměnné

$$y_1 = \tilde{\omega}, \quad y_2 = \tilde{M}_M, \quad (5.45)$$

pomocí kterých si převedeme soustavu pohybových rovnic (5.42), ve kterých se omezíme na členy prvního až třetího řádu (tj. položíme $n = 3$)*, do následujícího tvaru

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad (5.46)$$

kde jednotlivé matice jsou dány vztahy

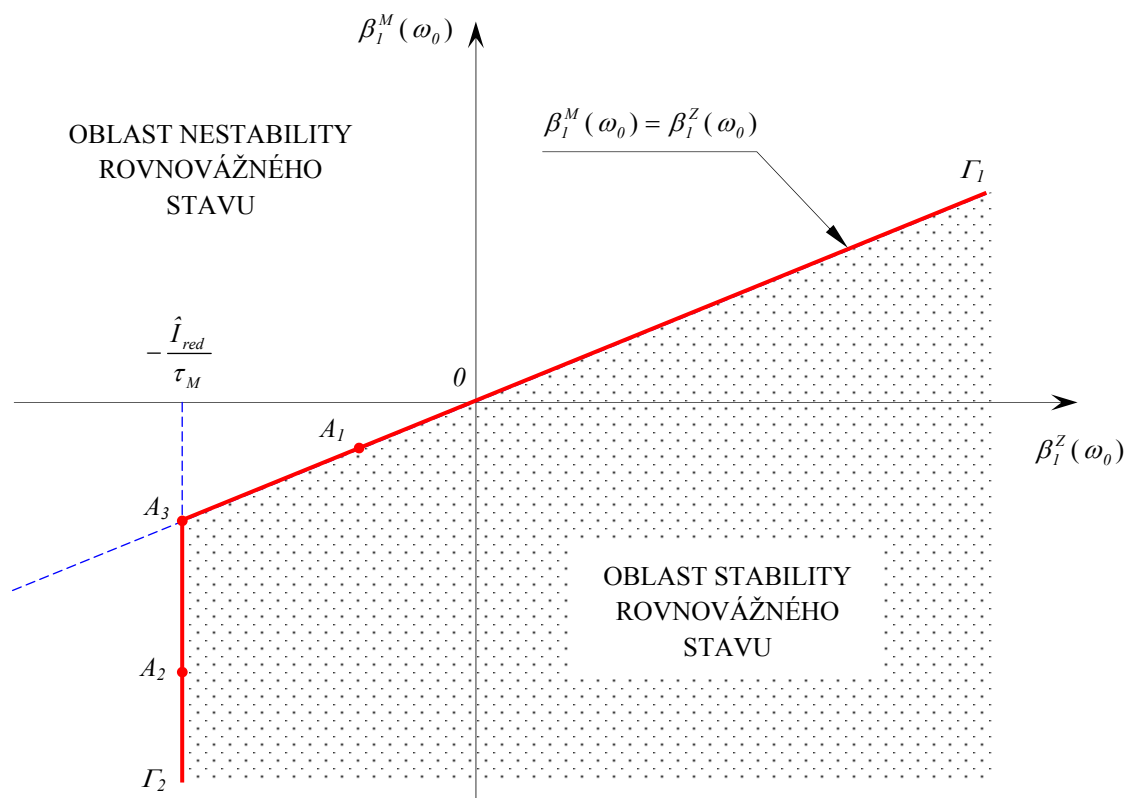
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_1^Z}{\hat{I}_{red}} & \frac{1}{\hat{I}_{red}} \\ \frac{\beta_1^M}{\tau_M} & -\frac{1}{\tau_M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_2^Z}{\hat{I}_{red}} y_1^2 - \frac{\beta_3^Z}{\hat{I}_{red}} y_1^3 \\ \frac{\beta_2^M}{\tau_M} y_1^2 + \frac{\beta_3^M}{\tau_M} y_1^3 \end{bmatrix}.$$

Nejdříve vyšetříme linearizaci soustavy (5.46) v okolí počátku (rovnovážného stavu). Matice linearizace \mathbf{B} má vlastní čísla

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_1^Z}{2 \tau_M \hat{I}_{red}} - \sqrt{\left[\frac{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_1^Z}{2 \tau_M \hat{I}_{red}} \right]^2 - \frac{\beta_1^Z - \beta_1^M}{\tau_M \hat{I}_{red}}}, \\ \lambda_2 &= -\frac{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_1^Z}{2 \tau_M \hat{I}_{red}} + \sqrt{\left[\frac{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_1^Z}{2 \tau_M \hat{I}_{red}} \right]^2 - \frac{\beta_1^Z - \beta_1^M}{\tau_M \hat{I}_{red}}}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

se zápornou reálnou částí tehdy a jen tehdy, jsou-li splněny následující podmínky

*) Na tomto místě je využito prakticky ověřené skutečnosti, že momentové charakteristiky pracovního stroje a hnacího motoru, lze v okolí rovnovážného stavu ω_0 v poměrně širokém intervalu hodnot úhlové rychlosti aproximovat velmi přesně polynomem třetího stupně.



Obr.69. Oblast asymptotické Ljapunovské stability rovnovážného stavu podle první metody Ljapunova.

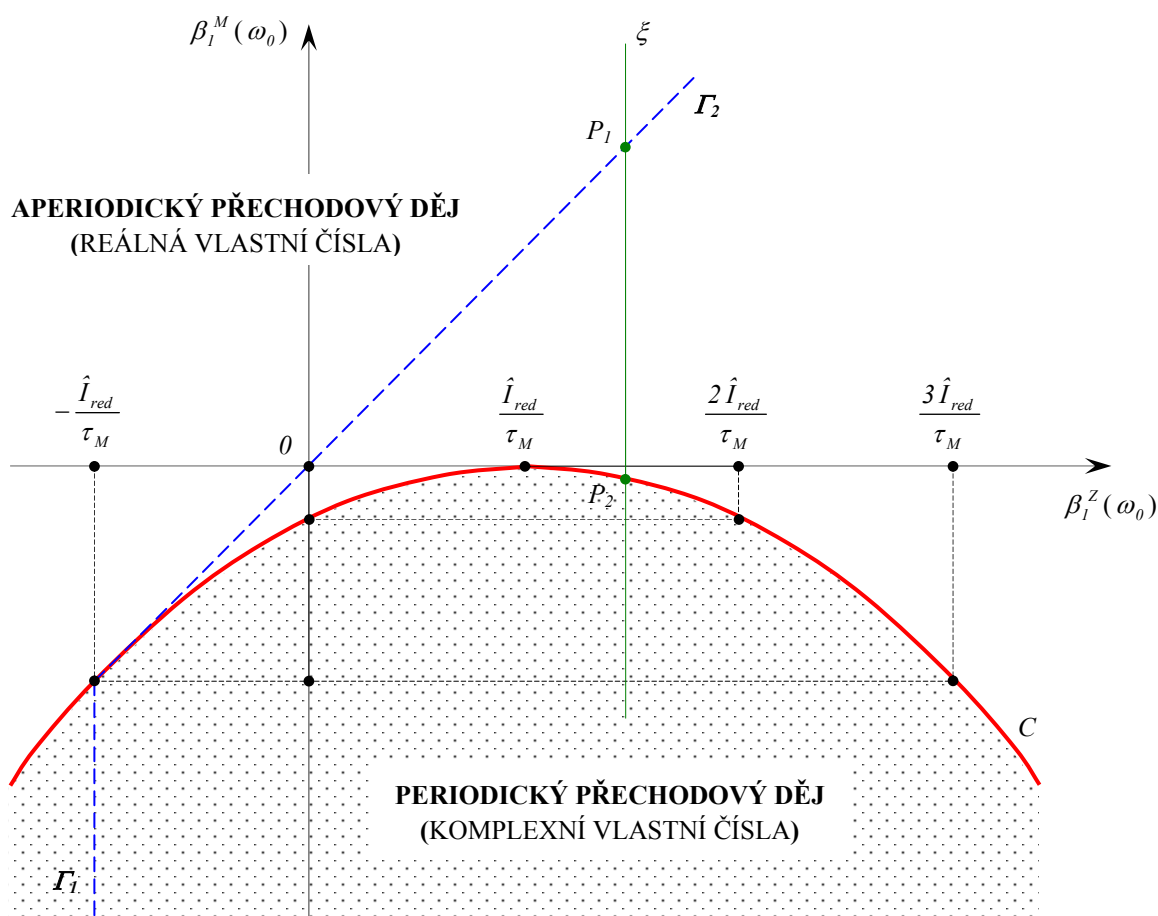
$$\frac{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_I^Z}{2 \tau_M \hat{I}_{red}} > 0 \Rightarrow \beta_I^Z > -\frac{\hat{I}_{red}}{\tau_M}, \quad (5.48a)$$

$$\frac{\beta_I^Z - \beta_I^M}{\tau_M \hat{I}_{red}} > 0 \Rightarrow \beta_I^Z > \beta_I^M, \quad (5.48b)$$

kteří lze poměrně jednoduše znázornit graficky, jak je patrné z obr.69.

Z matematického vyjádření podmínek stability rovnovážného stavu (5.48) je zřejmá vzájemná provázanost mezi základními vlastnostmi jednotlivých strukturních jednotek pohonové soustavy a vlastností pohonové soustavy jako celku, přičemž :

- podmínka stability (5.48a) omezuje hodnotu strmosti momentové charakteristiky pracovního stroje $\beta_I^Z(\omega_0)$ v závislosti na centrované složce redukováného momentu setrvačnosti \hat{I}_{red} , která vyjadřuje odpor pohonové soustavy jako celku proti změně jejího pohybového stavu, a na časové konstantě motoru τ_M , která reprezentuje dynamické vlastnosti motoru,
- podmínka stability (5.48b) omezuje hodnotu strmosti statické momentové charakteristiky hnačího motoru $\beta_I^M(\omega_0)$ v závislosti na hodnotě strmosti momentové charakteristiky pracovního stroje $\beta_I^Z(\omega_0)$.



Obr.70. Oblasti aperiodického a periodického přechodového děje

Grafického znázornění v systému souřadnic β_I^Z a β_I^M , kterého jsme použili ke znázornění podmínek stability rovnovážného stavu (5.48), lze také využít k vyznačení oblastí různých typů vlastních čísel matice linearizace \mathbf{B} (viz. obr.70), na jejichž základě lze usuzovat na kvalitativní charakter přechodového děje. Tyto oblasti jsou vzájemně od sebe odděleny křivkou C (na obr.70 vyznačenou tučnou čarou) o rovnici

$$C: \beta_I^M(\omega_0) = -\frac{(\hat{I}_{red} - \tau_M \beta_I^Z(\omega_0))^2}{4 \tau_M \hat{I}_{red}}, \quad (5.49)$$

která je v souřadnicích β_I^Z , β_I^M rovnicí paraboly. Je známou skutečností, že reálným vlastním číslům odpovídá aperiodický přechodový děj, kdežto komplexně sdruženým vlastním číslům odpovídá periodický přechodový děj. Jelikož je periodický přechodový děj z provozních důvodů většinou nežádoucí, je v těchto případech nutné, aby vlastní čísla matice linearizace \mathbf{B} byly reálné záporné. Toho lze dosáhnout tak, při dané hodnotě strmosti momentové charakteristiky pracovního stroje $\beta_I^Z(\omega_0)$, že vybereme motor jehož hodnota strmosti momentové charakteristiky $\beta_I^M(\omega_0)$ bude ležet v intervalu

$$-\frac{(\hat{I}_{red} - \tau_M \beta_I^Z(\omega_0))^2}{4 \tau_M \hat{I}_{red}} < \beta_I^M(\omega_0) < \beta_I^Z(\omega_0), \quad (5.50)$$

tj. mezi body P_1 a P_2 na přímce ξ (viz. obr.70).

5.2.1. Možnosti vzniku bifurkací rovnovážného stavu pohonu

Vyšetřeme nyní podmínky stability rovnovážného stavu nelineární pohonové soustavy na hranicích oblastí stability, zobrazených na obr.69 křivkami Γ_1 a Γ_2 , kdy některé z vlastních čísel matice linearizace \mathbf{B} má nulovou reálnou část, tj. budeme vyšetřovat zda na hranicích oblastí stability dochází k bifurkaci rovnovážného stavu, která má za následek kvalitativní změnu v chování dané nelineární pohonové soustavy. Jak je patrné z obr.69, který znázorňuje oblasti stabilního a nestabilního chování nelineární pohonové soustavy v blízkém okolí rovnovážného stavu, přicházejí v úvahu následující tři možnosti :

- Hranice oblasti stability Γ_1 : tato možnost nastává ve všech případech kdy platí (viz. např. bod A_1 na obr.69)

$$\beta_I^Z(\omega_0) > -\frac{\hat{I}_{red}}{\tau_M}, \quad \beta_I^M(\omega_0) = \beta_I^Z(\omega_0), \quad (5.51)$$

což po dosazení do vztahů (5.47) pro vlastní čísla značí, že vlastní číslo λ_1 je záporné reálné, kdežto vlastní číslo λ_2 je nulové.

- Hranice oblasti stability Γ_2 : tato možnost nastává ve všech případech kdy platí (viz. např. bod A_2 na obr.69)

$$\beta_I^M(\omega_0) < -\frac{\hat{I}_{red}}{\tau_M}, \quad \beta_I^Z(\omega_0) = -\frac{\hat{I}_{red}}{\tau_M}, \quad (5.52)$$

což po dosazení do vztahů (5.47) pro vlastní čísla značí, že komplexně sdružená vlastní čísla mají nulovou reálnou část, tzn. že platí $Re \lambda_1 = Re \lambda_2 = 0$.

- Průsečík hranic Γ_1 a Γ_2 oblastí stability : tato možnost nastává ve všech případech, kdy jsou splněny následující podmínky (viz. bod A_3 na obr.69)

$$\beta_I^Z(\omega_0) = -\frac{\hat{I}_{red}}{\tau_M}, \quad \beta_I^M(\omega_0) = \beta_I^Z(\omega_0), \quad (5.53)$$

což po dosazení do vztahů (5.47) pro vlastní čísla značí, že obě vlastní čísla jsou nulové, tzn. že platí $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Jelikož současné splnění podmínek (5.53) je v praktických aplikacích velmi nepravděpodobné, omezíme se dále pouze na podrobný rozbor podmínek stability rovnovážného stavu na hranicích oblastí stability Γ_1 a Γ_2 , kdy parametry soustavy vyhovují podmínkám (5.52) a (5.53).

5.2.1.1. Reálná bifurkace rovnovážného stavu pohonu

Jak již bylo řečeno, na hranici oblasti stability Γ_I , kde platí podmínky (5.51), má jedno vlastní číslo nulovou reálnou část a může tedy docházet k reálné bifurkaci rovnovážného stavu, která se projevuje kvalitativní změnou v chování dané nelineární pohonové soustavy. Otázkou vzniku a typu bifurkace rovnovážného stavu pro tento případ se budeme zabývat v tomto odstavci.

Dosazením podmínek (5.51) do vztahů pro výpočet vlastních čísel (5.47) dostaneme pro jednotlivá vlastní čísla matice linearizace \mathbf{B} následující vztahy

$$\lambda_i = -\frac{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_i^Z(\omega_0)}{\tau_M \hat{I}_{red}}, \quad \lambda_2 = 0. \quad (5.54)$$

Vlastní vektory \mathbf{v}_i , $i = 1, 2$, příslušející vlastním číslům λ_i , $i = 1, 2$, jež stanovíme řešením rovnic $(\mathbf{B} - \lambda_i \mathbf{E}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, $i = 1, 2$, jsou

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \tau_M \\ -\hat{I}_{red} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} I \\ \beta_1^Z(\omega_0) \end{bmatrix}. \quad (5.55)$$

Nyní si převedeme pomocí transformační matice

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} \tau_M & I \\ -\hat{I}_{red} & \beta_1^Z(\omega_0) \end{bmatrix},$$

a následující substituce

$$\mathbf{y} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{y},$$

soustavu diferenciálních rovnic (5.46) do tvaru,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (5.56)$$

kde matice $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}$ má reálný Jordanův kanonický tvar (tomuto procesu transformace soustavy diferenciálních rovnic na normální tvar se v matematické literatuře říká normalizace)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^- & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{kde} \quad \alpha = \frac{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_1^Z(\omega_0)}{\tau_M \hat{I}_{red}}, \quad (5.57)$$

a kde vektorová funkce $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ má tvar

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\delta_2 (\tau_M x_1 + x_2)^2 - \delta_3 (\tau_M x_1 + x_2)^3 \\ -\gamma_2 (\tau_M x_1 + x_2)^2 - \gamma_3 (\tau_M x_1 + x_2)^3 \end{bmatrix}, \quad (5.58)$$

přičemž platí

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \frac{\tau_M \beta_1^Z(\omega_0) \beta_2^Z(\omega_0) + \hat{I}_{red} \beta_2^M(\omega_0)}{\tau_M \hat{I}_{red} (\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_1^Z(\omega_0))}, & \gamma_2 &= \frac{\beta_2^Z(\omega_0) - \beta_2^M(\omega_0)}{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_1^Z(\omega_0)}, \\ \delta_3 &= \frac{\tau_M \beta_1^Z(\omega_0) \beta_3^Z(\omega_0) + \hat{I}_{red} \beta_3^M(\omega_0)}{\tau_M \hat{I}_{red} (\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_1^Z(\omega_0))}, & \gamma_3 &= \frac{\beta_3^Z(\omega_0) - \beta_3^M(\omega_0)}{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_1^Z(\omega_0)}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Jak je patrné z tvaru matice \mathbf{A} , soustava diferenciálních rovnic (5.46) se po transformaci $\mathbf{y} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}$ rozpadá na soustavu dvou rovnic, které jsou při linearizaci vzájemně nezávislé, tj.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_- &= \mathbf{A}^- \cdot \mathbf{x}_- + \mathbf{g}^-(\mathbf{x}), \\ \dot{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{A}^0 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{g}^0(\mathbf{x}),\end{aligned}\quad (5.60)$$

přičemž platí

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_- &= x_l, \quad \mathbf{g}^-(\mathbf{x}) = -\delta_2 (\tau_M x_l + x_2)^2 - \delta_3 (\tau_M x_l + x_2)^3, \\ \mathbf{x}_0 &= x_2, \quad \mathbf{g}^0(\mathbf{x}) = -\gamma_2 (\tau_M x_l + x_2)^2 - \gamma_3 (\tau_M x_l + x_2)^3.\end{aligned}\quad (5.61)$$

Z kvalitativní teorie diferenciálních rovnic však vyplývá, že soustava rovnic (5.60) je lokálně topologicky orbitálně ekvivalentní v počátku se soustavou

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_- &= -\mathbf{x}_-, \\ \dot{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{A}^0 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{g}^0(\mathbf{h}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0).\end{aligned}\quad (5.62)$$

Z věty o invariantních varietách a z věty o redukci na centrální varietu dále plyne (podrobné definice invariantních variet viz. [79]) : Je-li rovnovážný stav druhé rovnice v soustavě (5.62) Ljapunovsky stabilní, potom rovnovážný stav soustavy (5.60) je také Ljapunovsky stabilní. K efektivnímu rozhodnutí o stabilitě rovnovážného stavu potřebujeme znát zobrazení $\mathbf{x}_- = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)$, které nám určuje centrální varietu, což bývá velmi obtížné.

Pro praktické aplikace nám však stačí znát pouze dostatečně přesnou aproximaci zobrazení, kterou nalezneme pomocí následujícího operátoru

$$(\mathbf{M}\mathbf{u})(\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}'(\mathbf{x}_0) \left[\mathbf{A}^0 \cdot \mathbf{x}_0 + \mathbf{g}^0(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0) \right] - \mathbf{A}^- \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{g}^-(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0), \quad (5.63)$$

který má po dosazení za jednotlivé veličiny tvar

$$\begin{aligned}(\mathbf{M}u)(x_2) &= -u'(x_2) \left[\gamma_2 (\tau_M u(x_2) + x_2)^2 + \gamma_3 (\tau_M u(x_2) + x_2)^3 \right] + \alpha u(x_2) + \\ &+ \delta_2 (\tau_M u(x_2) + x_2)^2 + \delta_3 (\tau_M u(x_2) + x_2)^3.\end{aligned}\quad (5.64)$$

Za funkci $u(x_2)$ zvolme

$$u(x_2) = -\frac{\delta_2 x_2^2}{\alpha} \rightarrow u'(x_2) = -\frac{2\delta_2 x_2}{\alpha}, \quad (5.65)$$

tím ve výrazu (5.64) odstraníme nejnižší mocninu (tj. $\delta_2 x_2^2$) a dostáváme

$$\begin{aligned}(\mathbf{M}u)(x_2) &= -\frac{\tau_M \delta_2^2}{\alpha} \cdot \left[2 - \frac{\tau_M \delta_2}{\alpha} \cdot x_2 \right] \cdot x_2^3 + \delta_3 \cdot \left[1 - \frac{\tau_M \delta_2}{\alpha} \cdot x_2 \right]^3 \cdot x_2^3 + \\ &+ \frac{2\delta_2}{\alpha} \cdot \left[1 - \frac{\tau_M \delta_2}{\alpha} \cdot x_2 \right]^2 \cdot \left[\gamma_2 + \gamma_3 \cdot \left[1 - \frac{\tau_M \delta_2}{\alpha} \cdot x_2 \right] \right] = O(x_2^3),\end{aligned}\quad (5.66)$$

takže pro zobrazení $h(x_2)$ obdržíme výraz

$$h(x_2) = u(x_2) + (\mathbf{M}u)(x_2) = -\frac{\delta_2 x_2^2}{\alpha} + O(x_2^3). \quad (5.67)$$

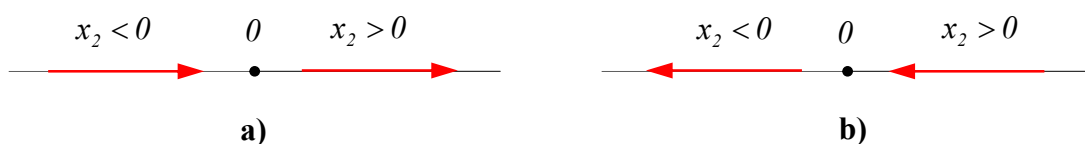
Dosazením výrazu (5.67) do druhé rovnice soustavy (5.60) dostáváme

$$\dot{x}_2 = -\gamma_2 x_2^2 (1 + O(x_2)). \quad (5.68)$$

Stabilita nulového rovnovážného stavu soustavy (5.60) je tedy podle věty o invariantních varietách určena stabilitou nulového rovnovážného stavu rovnice (5.68). Pro $\gamma_2 \neq 0$ je člen $O(x_2)$ v okolí počátku menší než jedna a proto nemá na stabilitu rovnovážného stavu vliv, takže ho můžeme vynechat, tzn. že budeme vyšetřovat stabilitu nulového rovnovážného stavu rovnice

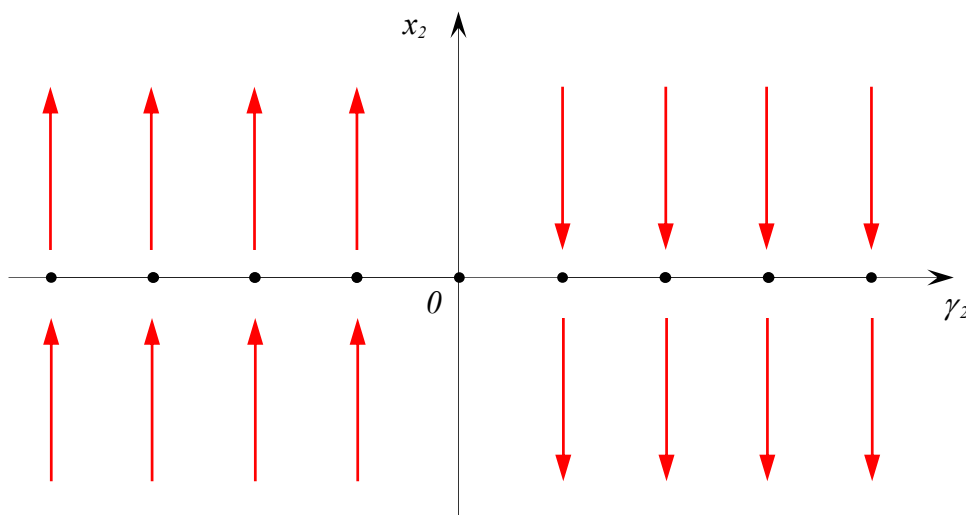
$$\dot{x}_2 = -\gamma_2 x_2^2, \quad \gamma_2 \neq 0. \quad (5.69)$$

Jestliže $\gamma_2 < 0$, potom pro $x_2 < 0$ platí $\dot{x}_2 > 0$ a pro $x_2 > 0$ platí $\dot{x}_2 > 0$. Fázový portrét rovnice (5.45) v okolí počátku pro $\gamma_2 < 0$ je znázorněn na obr.71a. Z tohoto obrázku je zřetelně vidět, že pro $x_2 < 0$ je rovnovážný stav stabilní, kdežto pro $x_2 > 0$ nestabilní. Jestliže $\gamma_2 > 0$, potom pro $x_2 < 0$ platí $\dot{x}_2 < 0$ a pro $x_2 > 0$ platí $\dot{x}_2 < 0$. Fázový portrét rovnice (5.69) v okolí počátku pro $\gamma_2 > 0$ je znázorněn na obr.71b. Z tohoto obrázku je ihned zřejmé, že pro $x_2 < 0$ je rovnovážný stav nestabilní, kdežto pro $x_2 > 0$ stabilní.



Obr.71. Fázový portrét rovnice (5.69) v okolí počátku pro $\gamma_2 < 0$ a), $\gamma_2 > 0$ b).

Nakreslíme-li si nyní, na základě výše uvedeného rozboru rovnice (5.69), průběh trajektorií veličiny x_2 v blízkém okolí počátku (rovnovážného stavu) v závislosti na hodnotě parametru γ_2 , obdržíme situaci znázorněnou na obr.72.



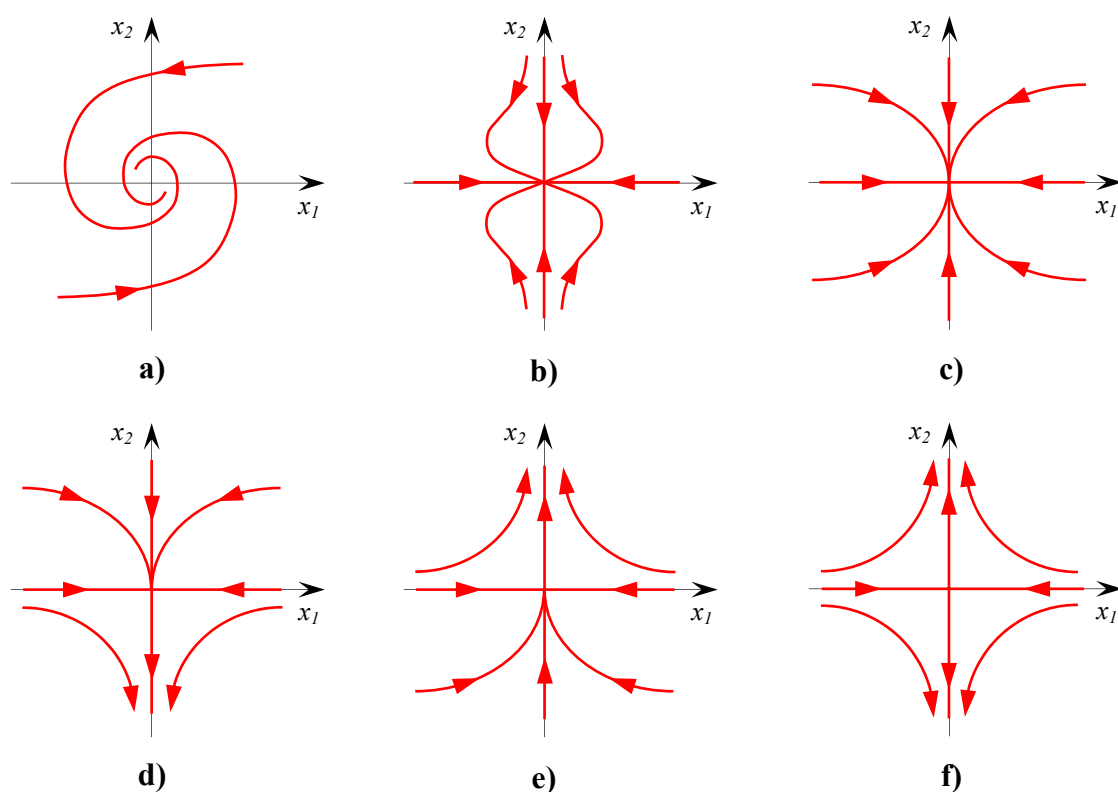
Obr.72. Průběh řešení rovnice (5.69) v závislosti na hodnotě parametru γ_2 .

Aby rovnovážný stav nelineární pohonové soustavy byl na hranici oblasti stability Γ_I (viz. obr.69) stabilní, je nutné aby pro $x_2 < 0$ bylo $\gamma_2 < 0$ a pro $x_2 > 0$ bylo $\gamma_2 > 0$ (viz. obr.72), což po dosažení za jednotlivé veličiny dává podmínky

$$y_2 < -\frac{\hat{I}_{red}}{\tau_M} \cdot y_1, \quad \text{resp.} \quad \tilde{M}_0 < -\frac{\hat{I}_{red}}{\tau_M} \cdot \tilde{\omega}_0 \quad \text{pro} \quad \beta_2^Z(\omega_0) < \beta_2^M(\omega_0), \quad (5.70a)$$

$$y_2 > -\frac{\hat{I}_{red}}{\tau_M} \cdot y_1, \quad \text{resp.} \quad \tilde{M}_0 > -\frac{\hat{I}_{red}}{\tau_M} \cdot \tilde{\omega}_0 \quad \text{pro} \quad \beta_2^Z(\omega_0) > \beta_2^M(\omega_0), \quad (5.70b)$$

z nichž je zřejmá závislost stability rovnovážného stavu na počátečních podmínkách, což je známá skutečnost z kvalitativní teorie diferenciálních rovnic.



Obr.73. Fázový portrét soustavy (4.56) v okolí počátku (rovnovážného stavu).

Nakreslíme-li si průběhy fázových trajektorií kanonických souřadnic x_1 a x_2 v blízkém okolí počátku (rovnovážného stavu) pro pevně zvolenou hodnotu $\beta_1^Z(\omega_0)$, vyhovující podmínce (5.48a), a pro různé hodnoty parametru $\beta_1^M(\omega_0)$, obdržíme výsledek znázorněný na obr.73, který si nyní podrobně analyzujeme :

- Obr.73a znázorňuje průběh fázových trajektorií v okolí rovnovážného stavu pro hodnoty parametru $\beta_1^M(\omega_0)$ vyhovující nerovnosti $\beta_1^M(\omega_0) < P_2$, kde souřadnici bodu P_2 určíme z rovnice (5.49). V tomto případě je rovnovážný stav **stabilním ohniskem**.

- Obr.73b znázorňuje průběh fázových trajektorií v okolí rovnovážného stavu pro hodnotu parametru $\beta_1^M(\omega_0)$ vyhovující rovnici $\beta_1^M(\omega_0) = P_2$, kde souřadnici bodu P_2 určíme z rovnice (5.49). V tomto případě je rovnovážný stav **stabilním uzlem**.
- Obr.73c znázorňuje průběh fázových trajektorií v okolí rovnovážného stavu pro hodnoty parametru $\beta_1^M(\omega_0)$ vyhovující nerovnici $P_2 < \beta_1^M(\omega_0) < P_1 = \beta_1^Z(\omega_0)$, kde souřadnici bodu P_2 určíme z rovnice (5.49). V tomto případě je rovnovážný stav opět **stabilním uzlem**.
- Obr.73d znázorňuje průběh fázových trajektorií v okolí rovnovážného stavu pro hodnotu parametru $\beta_1^M(\omega_0)$ na hranici oblasti stability Γ_1 (tj. pro $\beta_1^M(\omega_0) = \beta_1^Z(\omega_0)$) a pro případ kdy $\gamma_2 = \beta_2^Z(\omega_0) - \beta_2^M(\omega_0) > 0$. V tomto případě je rovnovážný stav pro $x_2 < 0$ **nestabilním sedlem** a pro $x_2 > 0$ **stabilním uzlem**.
- Obr.73e znázorňuje průběh fázových trajektorií v okolí rovnovážného stavu pro hodnotu parametru $\beta_1^M(\omega_0)$ na hranici oblasti stability Γ_1 (tj. pro $\beta_1^M(\omega_0) = \beta_1^Z(\omega_0)$) a pro případ kdy $\gamma_2 = \beta_2^Z(\omega_0) - \beta_2^M(\omega_0) < 0$. V tomto případě je rovnovážný stav pro $x_2 < 0$ **stabilním uzlem** a pro $x_2 > 0$ **nestabilním sedlem**.
- Obr.73f znázorňuje průběh fázových trajektorií v okolí rovnovážného stavu pro hodnoty parametru $\beta_1^M(\omega_0)$ vyhovující nerovnici $\beta_1^M(\omega_0) > P_1 = \beta_1^Z(\omega_0)$. V tomto případě je tedy rovnovážný stav **nestabilním sedlem**.

Na základě výše uvedeného rozboru lze konstatovat, že na hranici oblasti stability Γ_1 (viz. obr.69), kde platí $\beta_1^M(\omega_0) = \beta_1^Z(\omega_0)$, dochází k reálné bifurkaci rovnovážného stavu, tzn. že neexistuje takové blízké uzavřené okolí rovnovážného stavu ve kterém by nedocházelo, pro libovolně zvolenou hodnotu parametru $\gamma_2 = \text{konst.} \neq 0$, ke kvalitativní změně fázového portréту, jenž se projevuje kvalitativní změnou v chování dané nelineární pohonové soustavy. Vzhledem k tomu, že při malé změně kanonické souřadnice x_2 se mění charakter rovnovážného stavu (viz. obr.73d a obr.73e) ze stabilního uzlu na nestabilní sedlo nebo naopak (což závisí na tom, zda je nebo není splněna nerovnost $\beta_2^Z(\omega_0) < \beta_2^M(\omega_0)$), bývá tento typ bifurkace v odborné matematické literatuře označován jako reálná bifurkace typu **sedlo – uzel**.

Jestliže platí $\gamma_2 = 0$ (tj. pro $\beta_2^Z(\omega_0) - \beta_2^M(\omega_0) = 0$), nelze pomocí rovnice (5.69) o stabilitě rovnovážného stavu rozhodnout. V tomto případě musíme hledat přesnější aproximaci zobrazení $h(x_2)$ než je (5.67). Za tím účelem hledáme funkci $u(x_2)$ ve tvaru

$$u(x_2) = -\frac{\delta_2 x_2^2}{\alpha} + v(x_2) \rightarrow u'(x_2) = -\frac{2\delta_2 x_2}{\alpha} + v'(x_2), \quad (5.71)$$

který dosadíme do vztahu (5.64). Po provedení elementárních algebraických úprav dostaneme pro operátor $(\mathbf{M}u)(x_2)$ následující výraz

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{M}u)(x_2) = & -\gamma_3 \cdot \left[v' - \frac{2\delta_2 x_2}{\alpha} \right] \cdot \left[\tau_M \cdot \left(v - \frac{\delta_2 x_2^2}{\alpha} \right) + x_2 \right]^3 + \alpha \cdot \left(v - \frac{\delta_2 x_2^2}{\alpha} \right) + \\
 & + \delta_2 \cdot \left[\tau_M \cdot \left(v - \frac{\delta_2 x_2^2}{\alpha} \right) + x_2 \right]^2 + \delta_3 \cdot \left[\tau_M \cdot \left(v - \frac{\delta_2 x_2^2}{\alpha} \right) + x_2 \right]^3.
 \end{aligned} \quad (5.72)$$

Za funkci $v(x_2)$ zvolme

$$v(x_2) = - \left[\frac{\delta_3}{\alpha} - \frac{2\tau_M \delta_2^2}{\alpha^2} \right] \cdot x_2^3 \rightarrow v'(x_2) = -3 \cdot \left[\frac{\delta_3}{\alpha} - \frac{2\tau_M \delta_2^2}{\alpha^2} \right] \cdot x_2^2 \quad (5.73)$$

tím ve výrazu (5.72) odstraníme nejnižší mocninu (tj. $\left[\frac{\delta_3}{\alpha} - \frac{2\tau_M \delta_2^2}{\alpha^2} \right] \cdot x_2^3$) a dostáváme

$$(\mathbf{M}u)(x_2) = \delta_2 \cdot \left[\tau_M \cdot \left(\frac{\delta_3}{\alpha} - \frac{2\tau_M \delta_2^2}{\alpha^2} \right) \cdot x_2 - \frac{\delta_2}{\alpha} \right]^2 \cdot x_2^4 + \dots = O(x_2^4), \quad (5.74)$$

takže pro zobrazení $h(x_2)$ obdržíme výraz

$$h(x_2) = u(x_2) + (\mathbf{M}u)(x_2) = -\frac{\delta_2 x_2^2}{\alpha} - \left[\frac{\delta_3}{\alpha} - \frac{2\tau_M \delta_2^2}{\alpha^2} \right] \cdot x_2^3 + O(x_2^4). \quad (5.75)$$

Dosazením výrazu (5.75) do druhé rovnice soustavy (5.60) dostáváme

$$\dot{x}_2 = -\gamma_3 x_2^3 (I + O(x_2)). \quad (5.76)$$

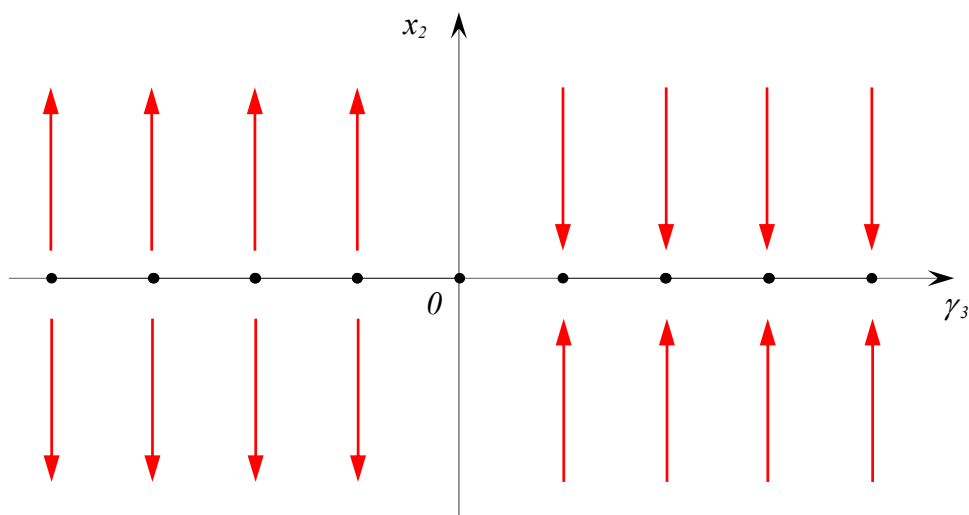
Stabilita nulového rovnovážného stavu soustavy (5.60) je tedy, pro případ kdy platí $\gamma_2 = 0$, podle věty o invariantních varietách určena stabilitou nulového rovnovážného stavu rovnice (5.76). Pro $\gamma_3 \neq 0$ je člen $O(x_2)$ v okolí počátku menší než jedna a proto nemá na stabilitu rovnovážného stavu vliv, takže ho můžeme vynechat, tzn. že vyšetřujeme stabilitu rovnovážného stavu rovnice

$$\dot{x}_2 = -\gamma_3 x_2^3, \quad \gamma_3 \neq 0. \quad (5.77)$$

Jestliže $\gamma_3 < 0$, potom pro $x_2 < 0$ je $\dot{x}_2 < 0$ a pro $x_2 > 0$ platí $\dot{x}_2 > 0$. Fázový portrét rovnice (5.77) v okolí počátku pro $\gamma_3 < 0$ je znázorněn na obr.74a. Z tohoto obrázku je ihned vidět, že pro $\gamma_3 < 0$ je rovnovážný stav nestabilní. Jestliže $\gamma_3 > 0$, potom pro $x_2 < 0$ je $\dot{x}_2 > 0$ a pro $x_2 > 0$ je $\dot{x}_2 < 0$. Fázový portrét rovnice (5.77) v okolí počátku pro $\gamma_3 > 0$ je znázorněn na obr.74b. Z tohoto obrázku je ihned zřejmé, že pro $\gamma_3 > 0$ je rovnovážný stav stabilní.



Obr.74. Fázový portrét rovnice (5.77) v okolí počátku pro $\gamma_3 < 0$ a), $\gamma_3 > 0$ b).


 Obr.75. Průběh řešení rovnice (5.77) v závislosti na hodnotě parametru γ_3 .

Nakreslíme-li si nyní, na základě výše uvedeného rozboru rovnice (5.77), průběh trajektorií veličiny x_2 v blízkém okolí počátku (rovnovážného stavu) v závislosti na hodnotě parametru γ_3 , obdržíme situaci znázorněnou na obr.75.

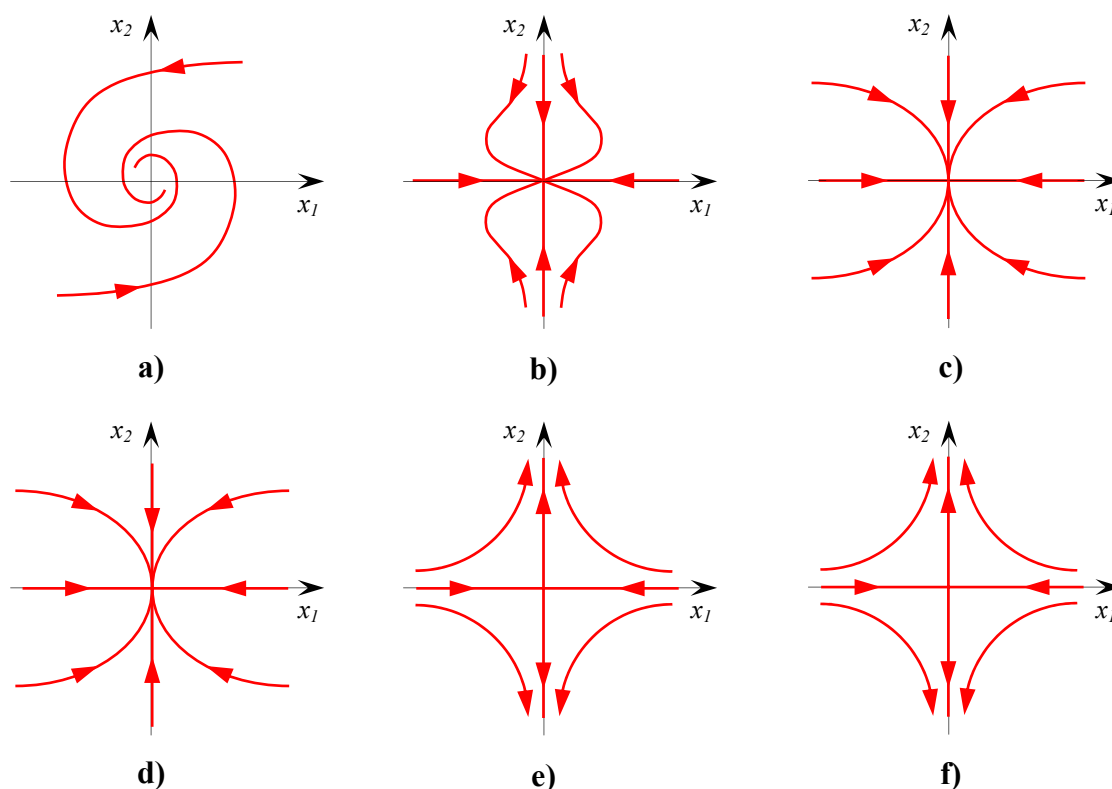
Aby rovnovážný stav nelineární pohonové soustavy byl na hranici oblasti stability Γ_I (viz. obr.41) stabilní, je nutné aby parametr γ_3 (pro případ kdy platí $\gamma_2 = 0$, tj. pro $\beta_2^Z(\omega_0) - \beta_2^M(\omega_0) = 0$) splňoval nerovnici $\gamma_3 > 0$ (viz. obr.47), což po dosazení za jednotlivé veličiny dává podmínku

$$\gamma_3 = \frac{\beta_3^Z(\omega_0) - \beta_3^M(\omega_0)}{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_1^Z(\omega_0)} > 0 \Rightarrow \beta_3^Z(\omega_0) > \beta_3^M(\omega_0). \quad (5.78)$$

Z podmínky stability (4.78) rovnovážného stavu na hranici oblasti stability Γ_I je zřejmé, že tato je nezávislá na hodnotách počátečních podmínek, resp. poruchových funkcí.

Nakreslíme-li si průběhy fázových trajektorií kanonických souřadnic x_1 a x_2 v blízkém okolí počátku pro pevně zvolenou hodnotu $\beta_1^Z(\omega_0)$, vyhovující podmínce (5.48a), a pro různé hodnoty parametru $\beta_1^M(\omega_0)$, obdržíme výsledek znázorněný na obr.76, který si podrobně analyzujeme :

- Obr.76a znázorňuje průběh fázových trajektorií v okolí rovnovážného stavu pro hodnoty parametru $\beta_1^M(\omega_0)$ vyhovující nerovnosti $\beta_1^M(\omega_0) < P_2$, kde souřadnici bodu P_2 určíme z rovnice (5.49). V tomto případě je rovnovážný stav **stabilním ohniskem**.
- Obr.76b znázorňuje průběh fázových trajektorií v okolí rovnovážného stavu pro hodnotu parametru $\beta_1^M(\omega_0)$ vyhovující rovnici $\beta_1^M(\omega_0) = P_2$, kde souřadnici bodu P_2 určíme z rovnice (5.49). V tomto případě je rovnovážný stav **stabilním uzlem**.
- Obr.76c znázorňuje průběh fázových trajektorií v okolí rovnovážného stavu pro hodnoty parametru $\beta_1^M(\omega_0)$ vyhovující nerovnici $P_2 < \beta_1^M(\omega_0) < P_1 = \beta_1^Z(\omega_0)$, kde souřadnici bodu P_2 určíme z rovnice (5.49). V tomto případě je rovnovážný stav opět **stabilním uzlem**.



Obr.76. Fázový portrét soustavy (5.56) v okolí počátku (rovnovážného stavu).

- Obr.76d znázorňuje průběh fázových trajektorií v okolí rovnovážného stavu pro hodnotu parametru $\beta_1^M(\omega_0)$ na hranici oblasti stability Γ_I (tj. pro $\beta_1^M(\omega_0) = \beta_1^Z(\omega_0)$) a pro případ kdy platí $\beta_2^Z(\omega_0) - \beta_2^M(\omega_0) = 0$ a $\beta_3^Z(\omega_0) - \beta_3^M(\omega_0) > 0$. V tomto případě je rovnovážný stav opět **stabilním uzlem**.
- Obr.76e znázorňuje průběh fázových trajektorií v okolí rovnovážného stavu pro hodnotu parametru $\beta_1^M(\omega_0)$ na hranici oblasti stability Γ_I (tj. pro $\beta_1^M(\omega_0) = \beta_1^Z(\omega_0)$) a pro případ kdy platí $\beta_2^Z(\omega_0) - \beta_2^M(\omega_0) = 0$ a $\beta_3^Z(\omega_0) - \beta_3^M(\omega_0) < 0$. V tomto případě je rovnovážný stav **nestabilním sedlem**.
- Obr.76f znázorňuje průběh fázových trajektorií v okolí rovnovážného stavu pro hodnoty parametru $\beta_1^M(\omega_0)$ vyhovující nerovnici $\beta_1^M(\omega_0) > P_I = \beta_1^Z(\omega_0)$. V tomto případě je tedy rovnovážný stav **nestabilním sedlem**.

Z výše uvedeného rozboru vyplývá závěr, že na hranici oblasti stability Γ_I (viz. obr.69), kde platí $\beta_1^M(\omega_0) = \beta_1^Z(\omega_0)$, $\gamma_2 = 0$ (tj. $\beta_2^M(\omega_0) = \beta_2^Z(\omega_0)$) a $\gamma_3 > 0$ (tj. $\beta_3^Z(\omega_0) - \beta_3^M(\omega_0) > 0$) nedochází ke vzniku reálné bifurkace rovnovážného stavu, tj. na hranici oblasti stability Γ_I **nedochází k porušení stability rovnovážného stavu** pohonové soustavy, projevující se kvalitativní změnou v chování dané nelineární pohonové soustavy.

5.2.1.2. Komplexní bifurkace rovnovážného stavu pohonu

Jak již bylo řečeno, na hranici oblasti stability Γ_2 , kde platí podmínky (5.52), mají komplexně sdružená vlastní čísla nulovou reálnou část a může tedy docházet ke vzniku tzv. komplexní (Hopfovy) bifurkace rovnovážného stavu, kdy se od rovnovážného stavu odvětví periodické řešení. V reálných pohonových soustavách se tento typ bifurkace projevuje vznikem samobuzených oscilací, tzv. limitního cyklu. Otázkou vzniku tohoto typu bifurkace rovnovážného stavu se budeme zabývat v tomto odstavci, přičemž k odpovědi na tuto otázku využijeme algoritmu uvedeného v práci [79] na str.195-207.

Vlastní čísla matice linearizace \mathbf{B} jsou v okolí hranice oblasti stability Γ_2 (viz. např. bod A_2 na obr.41) komplexně sdružená, jak je také zřejmé z obr.70, na kterém jsou vyznačeny oblasti různých typů vlastních čísel. Pro další řešení je výhodné tato komplexní vlastní čísla vyjádřit v následujícím algebraickém tvaru

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \alpha(\beta_l^Z) - i \Omega(\beta_l^Z), \\ \lambda_2 &= \alpha(\beta_l^Z) + i \Omega(\beta_l^Z),\end{aligned}\tag{5.79}$$

kde veličiny $\alpha(\beta_l^Z)$ a $\Omega(\beta_l^Z)$ jsou dány následujícími výrazy

$$\alpha(\beta_l^Z) = -\frac{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_l^Z}{2 \tau_M \hat{I}_{red}}, \quad \Omega(\beta_l^Z) = \sqrt{\frac{\beta_l^Z - \beta_l^M}{\tau_M \hat{I}_{red}} - \left[\frac{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_l^Z}{2 \tau_M \hat{I}_{red}} \right]^2}.\tag{5.80}$$

Kritická hodnota parametru β_l^Z , při které se veličina $\alpha(\beta_l^Z)$ rovná nule (tzn. že reálné části vlastních čísel (5.79) jsou nulové) je

$$\alpha(\beta_l^Z) \equiv -\frac{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_l^Z}{2 \tau_M \hat{I}_{red}} = 0 \Rightarrow (\beta_l^Z)_{krit} = -\frac{\hat{I}_{red}}{\tau_M},\tag{5.81}$$

což je v plné shodě s rovnicí (5.52).

Nyní musíme ověřit předpoklady použitelnosti algoritmu pro vyšetřování vlastností Hopfovy bifurkace (viz. [79], str.200), které mají v našem případě tvar

$$\alpha_{krit} = 0, \quad \dot{\alpha}_{krit} \neq 0, \quad \Omega_{krit} \neq 0.\tag{5.82}$$

Derivací vztahů (5.80) podle proměnné β_l^Z dostáváme

$$\dot{\alpha} \equiv \frac{d\alpha}{d\beta_l^Z} = -\frac{1}{2 \hat{I}_{red}}, \quad \dot{\Omega} \equiv \frac{d\Omega}{d\beta_l^Z} = \frac{1 - \frac{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_l^Z}{2 \hat{I}_{red}}}{2 \tau_M \hat{I}_{red} \sqrt{\frac{\beta_l^Z - \beta_l^M}{\tau_M \hat{I}_{red}} - \left[\frac{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_l^Z}{2 \tau_M \hat{I}_{red}} \right]^2}}.\tag{5.83}$$

Dosadíme-li nyní do vztahů (5.80) a (5.83) za parametr β_l^Z jeho kritickou hodnotu, definovanou rovnicí (5.52), resp. rovnicí (5.81), obdržíme následující výrazy

$$\alpha_{krit} = 0, \quad \dot{\alpha}_{krit} = -\frac{1}{2 \hat{I}_{red}}, \quad \Omega_{krit} = \sqrt{-\frac{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_l^M}{\tau_M^2 \hat{I}_{red}}}.\tag{5.84}$$

Porovnáme-li vztahy (5.84) s podmínkami (5.82) vidíme, že předpoklady použitelnosti algoritmu pro vyšetřování vlastností Hopfovy bifurkace jsou v našem případě splněny.

Vlastní vektor matice linearizace \mathbf{B} , odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_l = \alpha - i\Omega$, který stanovíme řešením rovnice $(\mathbf{B} - \lambda_l \mathbf{E}) \mathbf{v} = \mathbf{0}$, je

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \tau_M \\ -\hat{I}_{red} - i\tau_M \hat{I}_{red} \Omega_{krit} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_M \\ -\hat{I}_{red} \end{bmatrix} + i \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_M \hat{I}_{red} \Omega_{krit} \end{bmatrix}. \quad (5.85)$$

Nyní si převedeme pomocí transformační matice

$$\mathbf{P} = [\text{Re } \mathbf{v} \quad \text{Im } \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \tau_M & 0 \\ -\hat{I}_{red} & -\tau_M \hat{I}_{red} \Omega_{krit} \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

a následující substitute

$$\mathbf{y} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{y} \quad (5.87)$$

soustavu diferenciálních rovnic (5.46) do tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (5.88)$$

kde matice $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}$ má reálný Jordanův kanonický tvar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \text{Re } \lambda_l & \text{Im } \lambda_l \\ \text{Im } \lambda_l & \text{Re } \lambda_l \end{bmatrix}_{krit} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_{krit} \\ \Omega_{krit} & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.89)$$

a kde vektorová funkce $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ má tvar

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_2 x_1^2 - \gamma_3 x_1^3 \\ -\delta_2 x_1^2 - \delta_3 x_1^3 \end{bmatrix}, \quad (5.90)$$

přičemž platí

$$\delta_k = \frac{\beta_k^Z - \beta_k^M}{\hat{I}_{red} \Omega_{krit}} \cdot \tau_M^{k-2}, \quad \gamma_k = \frac{\beta_k^Z}{\hat{I}_{red}} \cdot \tau_M^{k-1}, \quad k = 2, 3. \quad (5.91)$$

Nyní si stanovíme všechny parciální derivace funkcí $g_1(x_1, x_2)$ a $g_2(x_1, x_2)$, v bodech $x_1 = x_2 = 0$ a $\beta_l^Z = (\beta_l^Z)_{krit}$, až do třetího řádu včetně

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2} &= -2\gamma_2, & \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1^3} &= -6\gamma_3, & \frac{\partial^3 g_1}{\partial x_2^3} &= \frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1^2} &= -2\delta_2, & \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial^3 g_2}{\partial x_1^3} &= -6\delta_3, & \frac{\partial^3 g_2}{\partial x_2^3} &= \frac{\partial^3 g_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial^3 g_2}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0, \end{aligned} \quad (5.92)$$

a vypočteme následující pomocné veličiny

$$\begin{aligned}
 G_{11} &= \frac{I}{4} \cdot \left[\frac{\partial^2 g_l}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_2^2} + i \left(\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} \right) \right] = -\frac{\gamma_2 + i\delta_2}{2}, \\
 G_{02} &= \frac{I}{4} \cdot \left[\frac{\partial^2 g_l}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_2^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2} + i \left(\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right] = -\frac{\gamma_2 + i\delta_2}{2}, \\
 G_{20} &= \frac{I}{4} \cdot \left[\frac{\partial^2 g_l}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_2^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2} + i \left(\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right] = -\frac{\gamma_2 + i\delta_2}{2}, \\
 G_{21} &= \frac{I}{8} \cdot \left[\frac{\partial^3 g_l}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 g_l}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 g_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 g_2}{\partial x_2^3} + \right. \\
 &\quad \left. + i \left(\frac{\partial^3 g_2}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 g_2}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 g_l}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 g_l}{\partial x_2^3} \right) \right] = -3 \cdot \frac{\gamma_3 + i\delta_3}{4}.
 \end{aligned} \tag{5.93}$$

Zavedeme novou komplexní funkci $\Psi(\delta_2, \gamma_2, \delta_3, \gamma_3)$ vztahem

$$\Psi(\delta_2, \gamma_2, \delta_3, \gamma_3) = \frac{i}{2\Omega_{krit}} \cdot \left[G_{20} G_{11} - 2 \cdot |G_{11}|^2 - \frac{I}{3} \cdot |G_{02}|^2 \right] + \frac{G_{21}}{2}, \tag{5.94}$$

který přejde, po dosazení za jednotlivé veličiny, do následujícího tvaru

$$\Psi(\delta_2, \gamma_2, \delta_3, \gamma_3) = -\frac{2\delta_2\gamma_2 + 3\gamma_3\Omega_{krit}}{8\Omega_{krit}} - i \frac{10\delta_2^2 + 4\gamma_2^2 + 9\delta_3\Omega_{krit}}{24\Omega_{krit}}. \tag{5.95}$$

Pomocí funkce $\Psi(\delta_2, \gamma_2, \delta_3, \gamma_3)$ si nyní definujeme následující parametry pomocí výrazů

$$b_2 \equiv 2 \cdot \operatorname{Re} \Psi(\delta_2, \gamma_2, \delta_3, \gamma_3), \tag{5.96a}$$

$$\mu_2 \equiv -\frac{\operatorname{Re} \Psi(\delta_2, \gamma_2, \delta_3, \gamma_3)}{\dot{\alpha}_{krit}}, \tag{5.96b}$$

$$\tau_2 \equiv -\frac{\operatorname{Im} \Psi(\delta_2, \gamma_2, \delta_3, \gamma_3) + \mu_2 \dot{\Omega}_{krit}}{\Omega_{krit}}, \tag{5.96c}$$

z nichž po dosazení obdržíme pro tyto parametry vyjádření

$$b_2 = -\frac{2\delta_2\gamma_2 + 3\gamma_3\Omega_{krit}}{4\Omega_{krit}}, \tag{5.97a}$$

$$\mu_2 = -\frac{2\delta_2\gamma_2 + 3\gamma_3\Omega_{krit}}{4\Omega_{krit}} \cdot \hat{I}_{red}, \tag{5.97b}$$

$$\tau_2 = -\frac{10\delta_2^2 + 4\gamma_2^2 + 9\delta_3\Omega_{krit}}{24\Omega_{krit}^2} - \frac{2\delta_2\gamma_2 + 3\gamma_3\Omega_{krit}}{8\tau_M\Omega_{krit}^3}. \tag{5.97c}$$

Pomocí parametrů b_2 , μ_2 můžeme vyšetřit kvalitativní vlastnosti Hopfovy bifurkace (tj. typ bifurkace a stabilitu odvětvěných periodických řešení), platí následující tvrzení (viz. [79], str.195-207): Jestliže platí $\dot{\alpha}_{krit} < 0$, tj. dvojice imaginárních vlastních čísel λ_1 , $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ matice linearizace \mathbf{C} přechází přes imaginární osu zprava doleva, a je-li $\mu_2 > 0$ (tj. superkritická Hopfova bifurkace),

potom $b_2 > 0$ a odvětvená periodická řešení jsou orbitálně nestabilní. Jestliže $\dot{\alpha}_{krit} < 0$ a $\mu_2 < 0$ (tj. subkritická Hopfova bifurkace), potom $b_2 < 0$ a odvětvená periodická řešení jsou orbitálně stabilní. Jestliže platí $\dot{\alpha}_{krit} > 0$, tj. dvojice imaginárních vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ matice linearizace \mathbf{C} přechází přes imaginární osu zleva doprava, a je-li $\mu_2 > 0$ (tj. superkritická Hopfova bifurkace), potom $b_2 < 0$ a odvětvená periodická řešení jsou orbitálně stabilní. Jestliže $\dot{\alpha}_{krit} > 0$ a $\mu_2 < 0$ (tj. subkritická Hopfova komplexní bifurkace), pak $b_2 > 0$ a odvětvená periodická řešení jsou orbitálně nestabilní.

Jelikož v našem konkrétním případě, jak je zřejmé ze vztahu (5.83), vždy platí $\dot{\alpha}_{krit} < 0$, může na hranici oblasti stability Γ_2 (viz. obr.69, bod A_2) dojít buď k superkritické Hopfově bifurkaci (tj. pro $\mu_2 > 0$, tzn. při přecházení parametru β_1^Z přes kritickou hodnotu, definovanou podmínkami (5.52), zleva doprava), při níž jsou odvětvená periodická řešení orbitálně nestabilní ($b_2 > 0$), nebo může dojít k subkritické Hopfově bifurkaci (tj. pro $\mu_2 < 0$, tzn. při přecházení parametru β_1^Z přes kritickou hodnotu, definovanou podmínkami (5.52), zprava doleva), při níž jsou odvětvená periodická řešení orbitálně stabilní ($b_2 < 0$). Vidíme tedy, že v našem konkrétním případě může dojít k odvětvení orbitálně stabilních periodických řešení.

Proveďme si nyní podrobný rozbor podmínek vzniku subkritické Hopfovy bifurkace ($\mu_2 < 0$), kdy se od rovnovážného stavu odvětví orbitálně stabilní ($b_2 < 0$) periodické řešení. Podmínka stabilní subkritické Hopfovy bifurkace rovnovážného stavu lze vyjádřit výrazem

$$Re \Psi(\delta_2, \gamma_2, \delta_3, \gamma_3) < 0,$$

který po dosazení a elementárních úpravách přejde v kvadratickou nerovnici v proměnné β_2^Z , jenž má následující tvar

$$(\beta_2^Z)^2 - \beta_2^M \beta_2^Z - \frac{3}{2} \tau_M \hat{I}_{red} \Omega_{krit}^2 \beta_3^Z < 0,$$

která je splněna tehdy a jen tehdy, pokud absolutní hodnota parametru β_2^M vyhovuje podmínce

$$|\beta_2^M(\omega_0)| > \beta_2^Z(\omega_0) - K \cdot \frac{\beta_3^Z(\omega_0)}{\beta_2^Z(\omega_0)}, \quad (5.98)$$

kde konstanta K je dána následujícím výrazem

$$K = \frac{3}{2} \tau_M \hat{I}_{red} \Omega_{krit}^2 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_1^M(\omega_0)}{\tau_M}, \quad (5.99)$$

z něhož je zřejmé, že konstanta K je vždy kladná, tj. $K > 0$.

Znáznorníme-li si podmínku stabilní subkritické Hopfovy bifurkace rovnovážného stavu (5.98) v souřadnicích $\beta_2^M(\omega_0) - \beta_2^Z(\omega_0)$, obdržíme situaci uvedenou na obr.77, přičemž obr.77a, resp. obr.77b platí pro hodnotu parametru $\beta_3^Z(\omega_0) < 0$, resp. $\beta_3^Z(\omega_0) > 0$. Z obr.77 je ihned patrné, že podmínka (5.98) rozděluje oblast parametrů $\beta_2^M(\omega_0) - \beta_2^Z(\omega_0)$ na dvě podoblasti, a to na oblast stabilní subkritické Hopfovy bifurkace (na obr.77 je vyznačena tečkovaně) a na oblast nestabilní

superkritické Hopfovy bifurkace, přičemž tyto dvě podoblasti jsou v rovině $\beta_2^M(\omega_0) - \beta_2^Z(\omega_0)$ od sebe vzájemně odděleny hraniční křivkou C o rovnici

$$C: \beta_2^M(\omega_0) = \beta_2^Z(\omega_0) - K \cdot \frac{\beta_3^Z(\omega_0)}{\beta_2^Z(\omega_0)}, \quad (5.100)$$

která je rovnicí zobecněné hyperboly (na obr.77 je křivka C znázorněna tučnou červenou čarou), jenž má asymptotu ξ danou výrazem^{*)}

$$\xi: \beta_2^M(\omega_0) = \beta_2^Z(\omega_0), \quad (5.101)$$

který popisuje přímku se sklonem 45° a procházející počátkem soustavy souřadnic.

Ze znázornění podmínky (5.98) v souřadnicovém systému $\beta_2^M(\omega_0) - \beta_2^Z(\omega_0)$, viz. obr.77, je dále patrné, že kvalitativní i kvantitativní průběh hraniční křivky C , která od sebe vzájemně odděluje oblasti stabilní subkritické a nestabilní superkritické Hopfovy bifurkace rovnovážného stavu, je velmi výrazně závislý na hodnotě parametru $\beta_3^Z(\omega_0)$ pracovního stroje :

- Jestliže parametr $\beta_3^Z(\omega_0)$ vyhovuje podmínce $\beta_3^Z(\omega_0) < 0$, potom hraniční křivka C , definovaná rovnicí (5.100), nabývá dvou extrémních hodnot (viz. obr.77a), jejichž polohu stanovíme z podmínky extrému funkce, tj. z rovnice

$$\frac{d\beta_2^M}{d\beta_2^Z} \equiv 1 + K \cdot \frac{\beta_3^Z}{(\beta_2^Z)^2} = 0, \quad (5.102)$$

jejímž řešením obdržíme

$$|(\beta_2^Z)_{ex}| = \sqrt{-K \beta_3^Z} = \sqrt{-\frac{3}{2} \tau_M \hat{I}_{red} \Omega_{krit}^2 \beta_3^Z}. \quad (5.103)$$

Extrémní hodnoty, kterých nabývá hraniční křivka C v bodech $\pm |(\beta_2^Z)_{ex}|$, pak určíme ze vztahu (5.100), do kterého dosadíme za parametr $\beta_2^Z(\omega_0)$ výraz (5.103), tím dostaneme

$$|(\beta_2^M)_{ex}| = 2 \sqrt{-K \beta_3^Z} = \sqrt{-6 \tau_M \hat{I}_{red} \Omega_{krit}^2 \beta_3^Z}. \quad (5.104)$$

Ze vztahu (5.100) pro křivku C , ve kterém položíme její levou stranu rovnu nule, tj.

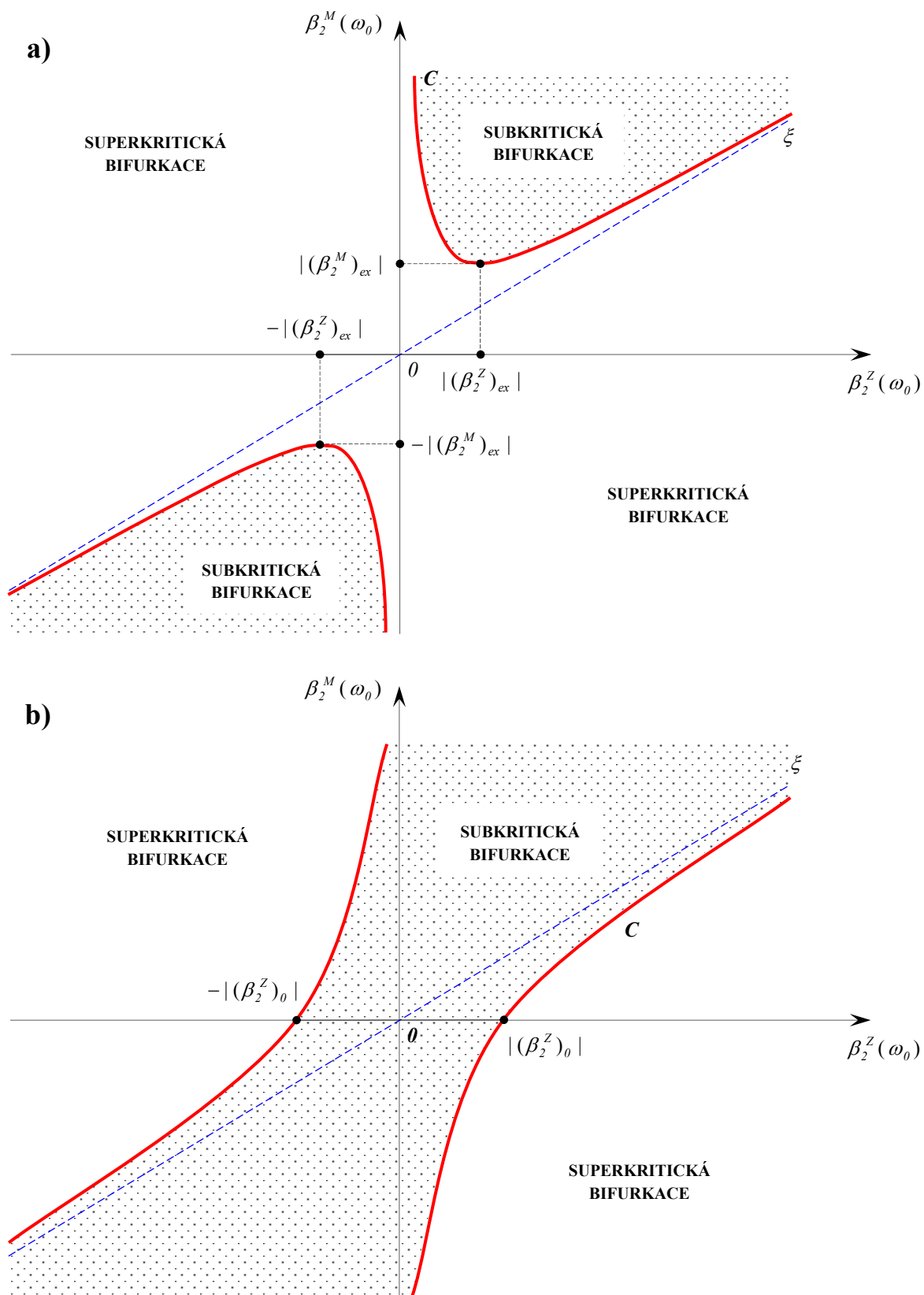
$$C: \beta_2^M(\omega_0) \equiv \beta_2^Z(\omega_0) - K \cdot \frac{\beta_3^Z(\omega_0)}{\beta_2^Z(\omega_0)} = 0, \quad (5.105)$$

^{*)} Obecná rovnice asymptoty je dána výrazem $\xi: \beta_2^M = a \beta_2^Z + b$, kde koeficienty a, b určíme z následujících vztahů

$$a = \lim_{\beta_2^Z \rightarrow \pm\infty} \frac{d\beta_2^M}{d\beta_2^Z} = \lim_{\beta_2^Z \rightarrow \pm\infty} \left[1 + K \cdot \frac{\beta_3^Z}{(\beta_2^Z)^2} \right],$$

$$b = \lim_{\beta_2^Z \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{d\beta_2^M}{d\beta_2^Z} \cdot \beta_2^Z - \beta_2^M \right] = \lim_{\beta_2^Z \rightarrow \pm\infty} \frac{2K \beta_3^Z}{(\beta_2^Z)^2}.$$

Z těchto vztahů pak po provedení limitních operací pro koeficienty vyplývá, že $a = 1$ a $b = 0$, což po dosazení do obecné rovnice asymptoty dává tento výraz $\xi: \beta_2^M(\omega_0) = \beta_2^Z(\omega_0)$

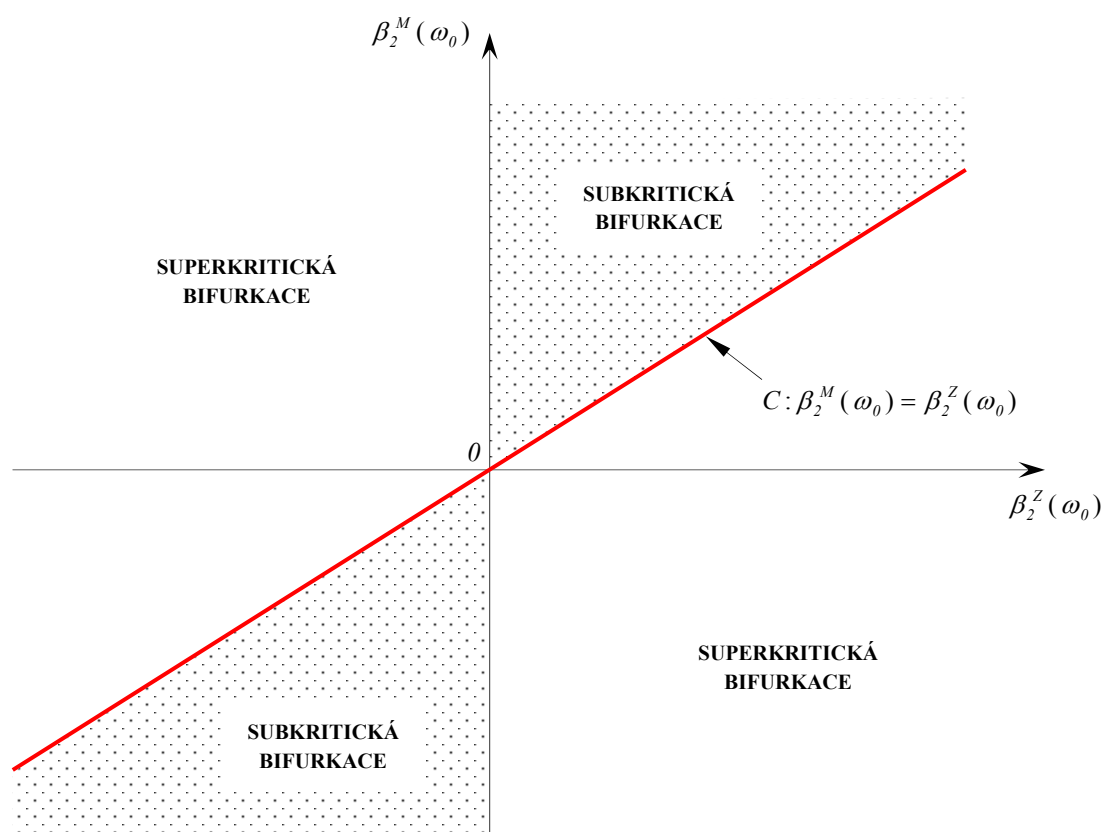

 Obr.77. Oblasti stabilní subkritické Hopfovy bifurkace rovnovážného stavu pro $\beta_3^Z < 0$ a), $\beta_3^Z > 0$ b).

je ihned zřejmé, s ohledem na předpoklad $\beta_3^Z(\omega_0) < 0$, že neexistuje reálné řešení dané rovnice vzhledem k proměnné $\beta_2^Z(\omega_0)$. Z toho tedy vyplývá, že hraniční křivka C nemá žádný společný bod se souřadnicovou osou $\beta_2^Z(\omega_0)$, tj. nikde ji neprotíná.

- Jestliže parametr $\beta_3^Z(\omega_0)$ vyhovuje podmínce $\beta_3^Z(\omega_0) > 0$, potom za vztahu (5.105) plyne, že existují dvě řešení dané rovnice vzhledem k proměnné $\beta_2^Z(\omega_0)$, které lze zapsat pomocí jediného vztahu takto

$$|(\beta_2^Z)_0| = \sqrt{K \beta_3^Z} = \sqrt{\frac{3}{2} \tau_M \hat{I}_{red} \Omega_{krit}^2 \beta_3^Z}, \quad (5.106)$$

což znamená, že hraniční křivka C má dva společné body se souřadnicovou osou $\beta_2^Z(\omega_0)$, tj. protíná ji ve dvou bodech. Z podmínky extrému funkce (5.102) dále vyplývá, s ohledem na předpoklad $\beta_3^Z(\omega_0) > 0$, že daná rovnice nemá žádné řešení v oboru reálných čísel. To tedy znamená, že výraz na levé straně rovnice (5.102) nemění pro libovolnou hodnotu parametru $\beta_2^Z(\omega_0)$ svoje znaménko, takže hraniční křivka C má monotónní průběh (tj. nikde nenabývá žádného lokálního extrému), který je patrný z obr.77b.



Obr.78. Oblast stabilní subkritické Hopfovy bifurkace rovnovážného stavu pro $\beta_3^Z = 0$.

- Jestliže parametr $\beta_3^Z(\omega_0)$ vyhovuje podmínce $\beta_3^Z(\omega_0) = 0$, potom hraniční křivka C splývá s asymptotou ξ , jak je patrné z porovnání vztahu (4.100), do kterého dosadíme $\beta_3^Z(\omega_0) = 0$, se vztahem (5.101). To znamená, že hraniční křivka C je přímkou se sklonem 45° , jenž prochází počátkem souřadnicové soustavy $\beta_2^M(\omega_0) - \beta_2^Z(\omega_0)$, jak je znázorněno na obr.78.

Na základě výše uvedeného podrobného kvalitativního i kvantitativního rozboru vzniku stabilní subkritické Hopfovy bifurkace rovnovážného stavu na hranici oblasti stability Γ_2 lze konstatovat několik základních skutečností :

- a) Jestliže hodnota parametru $\beta_3^Z(\omega_0)$ je záporná, tj. platí-li $\beta_3^Z(\omega_0) < 0$, potom jestliže absolutní hodnota parametru $\beta_2^M(\omega_0)$ vyhovuje následující nerovnici (viz. obr.77a)

$$|(\beta_2^M)_{ex}| < 2 \sqrt{-K \beta_3^Z} = \sqrt{-6 \tau_M \hat{I}_{red} \Omega_{krit}^2 \beta_3^Z},$$

pak na hranici oblasti stability Γ_2 (viz. obr.69) dojde vždy ke vzniku nestabilní superkritické Hopfovy bifurkaci rovnovážného stavu. To tedy znamená, že při překročení hranice oblasti stability Γ_2 se od rovnovážného stavu odvětví periodické řešení, které je však orbitálně nestabilní, takže sebemenší rušivý účinek způsobí přechod soustavy do nějakého jiného i velmi vzdáleného rovnovážného stavu.

- b) Tvar a velikost oblasti stabilní subkritické Hopfovy bifurkace rovnovážného stavu v souřadnicovém systému $\beta_2^M(\omega_0) - \beta_2^Z(\omega_0)$ je velmi výrazně závislý na hodnotě parametru $\beta_3^Z(\omega_0)$ pracovního stroje, jak je patrné z tvarů oblastí jednotlivých typů Hopfovy bifurkace znázorněných na obr.77 a obr.78, přičemž platí :

- pro danou pohonovou soustavu je při záporné hodnotě parametru $\beta_3^Z(\omega_0)$ oblast stabilní subkritické Hopfovy bifurkace rovnovážného stavu vždy menší než při kladné hodnotě parametru $\beta_3^Z(\omega_0)$, jak se lze snadno přesvědčit vzájemným porovnáním obr.77a a obr.77b,
- pro danou pohonovou soustavu dochází při rostoucí kladné, resp. klesající záporné hodnotě parametru $\beta_3^Z(\omega_0)$ ke zvětšování, resp. zmenšování oblasti stabilní subkritické Hopfovy bifurkace rovnovážného stavu.

5.3. Odezva pohonové soustavy na harmonické buzení

Řešení odezvy pohonové soustavy na harmonické buzení představuje nejzákladnější a také nej důležitější součást analýzy dynamických vlastností daného pohonu, protože na základě získaného řešení lze již v etapě konstrukčního návrhu posoudit chování dané pohonové soustavy v základních dynamických režimech v závislosti na typu poháněného pracovního stroje a hnacího motoru. Pro získání odezvy pohonu na harmonické buzení můžeme použít celé řady přibližných metod (metoda

harmonické rovnováhy, Poincaréova metoda malého parametru, Van der Polova metoda, metoda ekvivalentní linearizace, metoda vážené středně kvadratické linearizace apod.), přičemž jako nejlepší, pro řešení daného úkolu, se jeví jedna z asymptotických metod, a to tzv. „metoda středních hodnot“. Tato metoda umožňuje kromě stanovení vztahů pro amplitudy a fázová posunutí ustálených vynucených kmitů, také posoudit jejich stabilitu a poskytuje rovnice pro řešení přechodových dějů, přičemž dosažené výsledky lze neustále zpřesňovat výpočtem vyšších přiblížení. Abychom mohli tuto metodu použít na matematický model pohonu, reprezentovaný rovnicemi (5.42), musíme nejdříve převést původní soustavu dvou nelineárních diferenciálních rovnic 1.řádu na jednu nelineární diferenciální rovnici 2.řádu. Za tím účelem si z první rovnice (5.42) vyjádříme poruchovou složku momentu motoru \tilde{M}_M

$$\tilde{M}_M = \hat{I}_{red} \ddot{\tilde{\omega}} + \sum_{k=1}^n \beta_k^Z(\omega_0) \tilde{\omega}^k, \quad (5.107)$$

jehož časovou derivací obdržíme

$$\dot{\tilde{M}}_M = \hat{I}_{red} \ddot{\tilde{\omega}} + \sum_{k=1}^n k \beta_k^Z(\omega_0) \tilde{\omega}^{k-1} \dot{\tilde{\omega}}. \quad (5.108)$$

Dosazením vztahů (5.107) a (5.108) do druhé rovnice (5.26), pak po elementárních úpravách dostaneme následující rovnici

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{\omega}} + \frac{\beta_1^Z - \beta_1^M}{\tau_M \hat{I}_{red}} \tilde{\omega} = P(t) - \frac{\beta_2^Z - \beta_2^M}{\tau_M \hat{I}_{red}} \tilde{\omega}^2 - \frac{\beta_3^Z - \beta_3^M}{\tau_M \hat{I}_{red}} \tilde{\omega}^3 - \\ - \left[\frac{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_1^Z}{\tau_M \hat{I}_{red}} + \frac{2 \beta_2^Z}{\hat{I}_{red}} \tilde{\omega} + \frac{3 \beta_3^Z}{\hat{I}_{red}} \tilde{\omega}^2 \right] \dot{\tilde{\omega}}, \end{aligned} \quad (5.109)$$

kde jsme zavedli harmonický budící signál $P(t)$, vyjadřující poruchy momentu setrvačnosti, zatěžovacího momentu a hnacího momentu, který uvažujeme ve tvaru

$$P(t) = (C_1 \omega_0^2 + C_2) \cos \omega_0 t, \quad (5.110)$$

tj. ve tvaru harmonického signálu s konstantní amplitudou a amplitudou úměrnou kvadrátu úhlové frekvence ω_0 , která odpovídá rovnovážnému stavu pohonu (viz. rovnice (5.8)). Rovnici (5.109) lze dále zjednodušit zavedením pomocného parametru μ vztahem

$$\frac{\Omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} = \mu \Rightarrow \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} = 1 + \mu, \quad (5.111)$$

a časovou transformací $\tau = \omega_0 t$, čímž dostaneme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\ddot{\tilde{\omega}} + \tilde{\omega} = g(\tau) - \mu \tilde{\omega} - (a_0 + a_1 \tilde{\omega} + a_2 \tilde{\omega}^2) \tilde{\omega}' - k_2 \tilde{\omega}^2 - k_3 \tilde{\omega}^3 \quad (5.112)$$

kde funkce $g(\tau)$ je dána následujícím výrazem

$$g(\tau) = D \cos \tau = \left[C_1 + \frac{C_2}{\omega_0^2} \right] \cos \tau, \quad (5.113)$$

a kde jednotlivé pomocné veličiny jsou definovány vztahy

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{\beta_l^Z - \beta_l^M}{\tau_M \hat{I}_{red}}, & a_0 &= \frac{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_l^Z}{\tau_M \hat{I}_{red} \omega_0}, & a_1 &= \frac{2 \beta_2^Z}{\hat{I}_{red} \omega_0}, \\ a_2 &= \frac{3 \beta_3^Z}{\hat{I}_{red} \omega_0}, & k_2 &= \frac{\beta_2^Z - \beta_2^M}{\tau_M \hat{I}_{red} \omega_0^2}, & k_3 &= \frac{\beta_3^Z - \beta_3^M}{\tau_M \hat{I}_{red} \omega_0^2}. \end{aligned} \quad (5.114)$$

Rovnice (5.112) nám tedy představuje hledanou pohybovou rovnici pohonu vhodnou pro řešení odezvy pohonu na harmonický budící signál.

5.3.1. Amplitudy a fázová posunutí ustálených vynucených kmitů

Nyní, když již jsme získali pohybovou rovnici pohonu vhodnou pro řešení ustálených vynucených kmitů, aplikujme metodu středních hodnot na vyšetření odezvy pohonu na harmonický budící signál. Podle této metody lze řešení rovnice (5.112) předpokládat ve tvaru

$$\tilde{\omega} = A \cos \tau + B \sin \tau, \quad (5.115)$$

přičemž amplitudy A a B nejsou konstanty, nýbrž jsou funkcemi času, tj. $A = A(\tau)$ a $B = B(\tau)$. Požadujeme-li aby výraz pro časovou derivaci (5.115) nabýval co možná nejjednoduššího tvaru, tj. chceme-li aby bylo

$$\tilde{\omega}' = -A \sin \tau + B \cos \tau, \quad (5.116)$$

potom musí platit rovnice

$$A' \cos \tau + B' \sin \tau = 0, \quad (5.117)$$

která vyjadřuje vzájemnou vazbu mezi amplitudami $A(\tau)$ a $B(\tau)$. Provedeme-li další časovou derivaci výrazu (5.116), obdržíme vztah

$$\tilde{\omega}'' = -A' \sin \tau - A \cos \tau + B' \cos \tau - B \sin \tau,$$

jehož dosazením, spolu s výrazy (5.115) a (5.116), do vztahu (5.112) dostaneme rovnici

$$-A' \sin \tau + B' \cos \tau = g(\tau) + h(A \cos \tau + B \sin \tau, -A \sin \tau + B \cos \tau), \quad (5.118)$$

kde platí

$$\begin{aligned} h(A \cos \tau + B \sin \tau, -A \sin \tau + B \cos \tau) = \\ = -\mu(A \cos \tau + B \sin \tau) - k_2(A \cos \tau + B \sin \tau)^2 - k_3(A \cos \tau + B \sin \tau)^3 - \\ - (a_0 + a_1(A \cos \tau + B \sin \tau) + a_2(A \cos \tau + B \sin \tau)^2)(-A \sin \tau + B \cos \tau). \end{aligned} \quad (5.119)$$

Vztahy (5.117) a (5.118) vytvářejí soustavu dvou vzájemně vázaných nelineárních diferenciálních rovnic prvního řádu pro neznámé funkce amplitudy $A(\tau)$ a $B(\tau)$, kterou lze elementárními úpravami převést do následujícího tvaru

$$\begin{aligned} A' &\equiv \frac{dA}{d\tau} = -g(\tau) \sin \tau - h(A \cos \tau + B \sin \tau, -A \sin \tau + B \cos \tau) \sin \tau, \\ B' &\equiv \frac{dB}{d\tau} = g(\tau) \cos \tau + h(A \cos \tau + B \sin \tau, -A \sin \tau + B \cos \tau) \cos \tau. \end{aligned} \quad (5.120)$$

Rozdělíme-li pravé strany výrazů (5.120) na monotónní složky \bar{A} a \bar{B} nezávislé explicitně na čase τ a na oscilující složky \tilde{A} a \tilde{B} s nulovou střední hodnotou, můžeme psát

$$A = \bar{A} + \tilde{A}, \quad B = \bar{B} + \tilde{B}. \quad (5.121)$$

Vzhledem k tomu, že zkoumáme děje, které jsou řádově delší než je perioda rychlých oscilací, lze rychle oscilující členy \tilde{A} a \tilde{B} zanedbat. Pohyb je pak dán rovnicemi, kde na pravých stranách jsou střední hodnoty výrazů (5.120)

$$\begin{aligned} A' &\equiv \frac{dA}{d\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\bar{A} + \tilde{A}) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{A} d\tau + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{A} d\tau}_{\approx 0} \approx \bar{A}, \\ B' &\equiv \frac{dB}{d\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\bar{B} + \tilde{B}) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{B} d\tau + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{B} d\tau}_{\approx 0} \approx \bar{B}, \end{aligned} \quad (5.122)$$

přičemž pro monotónní složky \bar{A} a \bar{B} platí

$$\begin{aligned} \bar{A} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [g(\tau) + h(A \cos \tau + B \sin \tau, -A \sin \tau + B \cos \tau)] \sin \tau d\tau, \\ \bar{B} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [g(\tau) + h(A \cos \tau + B \sin \tau, -A \sin \tau + B \cos \tau)] \cos \tau d\tau. \end{aligned} \quad (5.123)$$

Uvážíme-li nyní, že platí

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} g(\tau) \sin \tau d\tau &= 0, \quad \int_0^{2\pi} g(\tau) \cos \tau d\tau = \pi D, \\ \int_0^{2\pi} h(A \cos \tau + B \sin \tau, -A \sin \tau + B \cos \tau) \sin \tau d\tau &= \\ &= \pi \left[a_0 A - \mu B + \frac{a_2}{4} A(A^2 + B^2) - \frac{3k_3}{4} B(A^2 + B^2) \right], \\ \int_0^{2\pi} h(A \cos \tau + B \sin \tau, -A \sin \tau + B \cos \tau) \cos \tau d\tau &= \\ &= -\pi \left[\mu A + a_0 B + \frac{a_2}{4} B(A^2 + B^2) + \frac{3k_3}{4} A(A^2 + B^2) \right], \end{aligned}$$

pak pro monotónní složky dostáváme výrazy

$$\begin{aligned} \bar{A} &= -\frac{a_0}{2} A + \frac{\mu}{2} B - \frac{a_2}{8} A(A^2 + B^2) + \frac{3k_3}{8} B(A^2 + B^2), \\ \bar{B} &= \frac{D}{2} - \frac{\mu}{2} A - \frac{a_0}{2} B - \frac{a_2}{8} B(A^2 + B^2) - \frac{3k_3}{8} A(A^2 + B^2), \end{aligned} \quad (5.124)$$

jejichž dosazením do (5.122) obdržíme pro časovou změnu amplitud $A(\tau)$ a $B(\tau)$ vztahy

$$\begin{aligned} A' &\equiv \frac{dA}{d\tau} = -\frac{a_0}{2}A + \frac{\mu}{2}B - \frac{a_2}{8}A(A^2 + B^2) + \frac{3k_3}{8}B(A^2 + B^2), \\ B' &\equiv \frac{dB}{d\tau} = \frac{D}{2} - \frac{\mu}{2}A - \frac{a_0}{2}B - \frac{a_2}{8}B(A^2 + B^2) - \frac{3k_3}{8}A(A^2 + B^2). \end{aligned} \quad (5.125)$$

Pro další řešení je výhodné zavést polární souřadnice R, ψ vztahy

$$A = R \cos \psi, \quad B = R \sin \psi, \quad (5.126)$$

jejichž derivací podle času τ dostaneme

$$A' = R' \cos \psi - R \psi' \sin \psi, \quad B' = R' \sin \psi + R \psi' \cos \psi. \quad (5.127)$$

Dosadíme-li nyní vztahy (5.126) a (5.127) do rovnic (5.125) a uvažíme-li, že platí $A^2 + B^2 = R^2$, pak po elementárních úpravách obdržíme systém rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} R' &\equiv \frac{dR}{d\tau} = \frac{1}{2} \left[D \sin \psi - a_0 R - \frac{a_2}{4} R^3 \right], \\ R \psi' &\equiv R \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{1}{2} \left[D \cos \psi - \mu R - \frac{3k_3}{4} R^3 \right], \end{aligned} \quad (5.128)$$

který se jeví jako nejvhodnější pro řešení odezvy pohonu na harmonické buzení.

Vztahy pro amplitudu R_0 a fázové posunutí ψ_0 ustálených vynucených kmitů, pro které platí $R_0 = \text{konst.}$ a $\psi_0 = \text{konst.}$, stanovíme z rovnic (5.128), do kterých dosadíme $R = R_0$ a $\psi = \psi_0$, tím dostaneme následující systém nelineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned} 4D \sin \psi_0 &= 4a_0 R_0 + a_2 R_0^3, \\ 4D \cos \psi_0 &= 4\mu R_0 + 3k_3 R_0^3, \end{aligned} \quad (5.129)$$

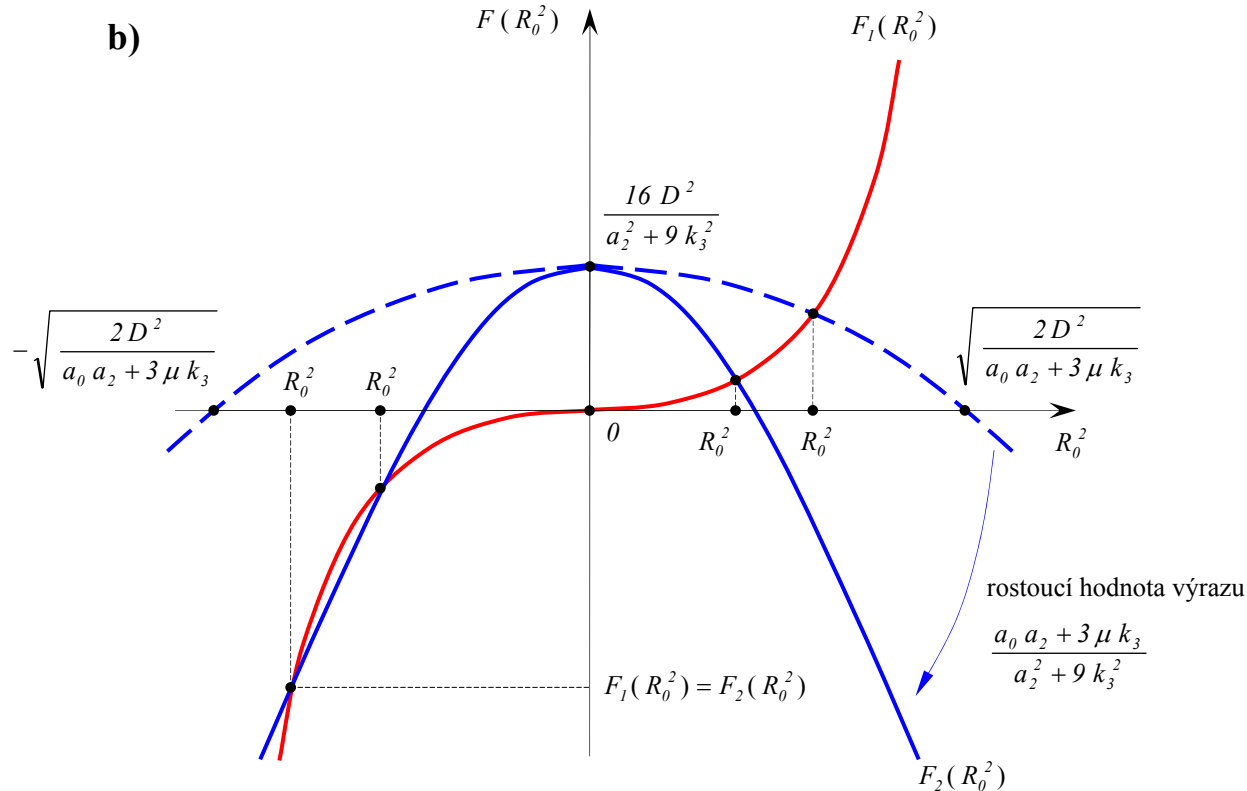
ze kterých po elementární úpravě obdržíme výrazy pro určení amplitudy R_0 a fázového posunutí ψ_0 ustálených vynucených kmitů ve tvaru

$$R_0^6 + 8 \frac{a_0 a_2 + 3\mu k_3}{a_2^2 + 9k_3^2} R_0^4 + 16 \frac{a_0^2 + \mu^2}{a_2^2 + 9k_3^2} R_0^2 - \frac{16D^2}{a_2^2 + 9k_3^2} = 0, \quad (5.130)$$

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \frac{4a_0 + a_2 R_0^2}{4\mu + 3k_3 R_0^2} \Rightarrow \psi_0 = \operatorname{arctg} \frac{4a_0 + a_2 R_0^2}{4\mu + 3k_3 R_0^2}, \quad (5.131)$$

ze kterých je zřejmé, že výraz (5.130) je algebraickou rovnicí šestého stupně pro neznámou hodnotu amplitudy R_0 . Uvažíme-li však, že v rovnici (5.130) se vyskytují neznámé hodnoty amplitud R_0 pouze v sudých mocninách, můžeme rovnici (5.130) považovat za kubickou rovnici pro neznámou hodnotu kvadrátu amplitudy R_0^2 ustálených vynucených kmitů.

Analyzujeme si nyní podrobněji algebraickou rovnici (5.130), která nám definuje hodnotu kvadrátu amplitudy R_0^2 ustáleného vynuceného kmitání. Z lineární algebry je známo, že kubická rovnice má obecně tři kořeny, přičemž jeden kořen je vždy reálný. Za účelem zjištění povahy kořenů rovnice (5.130) si tuto rovnici upravme do následujícího tvaru



Obr.79. Znázornění řešení rovnice (5.130) pro : a) $\frac{a_0 a_2 + 3 \mu k_3}{a_2^2 + 9 k_3^2} < 0$, b) $\frac{a_0 a_2 + 3 \mu k_3}{a_2^2 + 9 k_3^2} > 0$.

$$R_0^2 \left[R_0^4 + 16 \frac{a_0^2 + \mu^2}{a_2^2 + 9 k_3^2} \right] = \frac{16 D^2}{a_2^2 + 9 k_3^2} - 8 \frac{a_0 a_2 + 3 \mu k_3}{a_2^2 + 9 k_3^2} R_0^4, \quad (5.132)$$

tj. řešení definujeme jako průsečík dvou funkcí, definovaných vztahy

$$\begin{aligned} F_1(R_0^2) &= R_0^2 \left[R_0^4 + 16 \frac{a_0^2 + \mu^2}{a_2^2 + 9 k_3^2} \right], \\ F_2(R_0^2) &= \frac{16 D^2}{a_2^2 + 9 k_3^2} - 8 \frac{a_0 a_2 + 3 \mu k_3}{a_2^2 + 9 k_3^2} R_0^4. \end{aligned} \quad (5.133)$$

Uvážíme-li nyní, že vždy platí

$$\frac{a_0^2 + \mu^2}{a_2^2 + 9 k_3^2} \geq 0, \quad \frac{16 D^2}{a_2^2 + 9 k_3^2} \geq 0,$$

potom kvalitativní průběh funkce $F_2(R_0^2)$, a tím i počet reálných kořenů rovnice (5.130), je velmi výrazně závislý na hodnotě výrazu $\frac{a_0 a_2 + 3 \mu k_3}{a_2^2 + 9 k_3^2}$, který může nabývat libovolných hodnot z oboru reálných čísel. Znázorníme-li si průběhy funkcí $F_1(R_0^2)$ a $F_2(R_0^2)$, v závislosti na hodnotě výrazu $\frac{a_0 a_2 + 3 \mu k_3}{a_2^2 + 9 k_3^2}$, obdržíme situaci znázorněnou na obr.79. Ze znázornění na obr.79a, který platí pro

reálné záporné hodnoty výrazu $\frac{a_0 a_2 + 3 \mu k_3}{a_2^2 + 9 k_3^2}$, vyplývá, že funkce $F_1(R_0^2)$ a $F_2(R_0^2)$ mají jen

jeden jediný společný bod, což znamená, že existuje jedno reálné kladné řešení a dvě komplexně sdružená řešení rovnice (5.130), přičemž fyzikální smysl (kvadrát amplitudy musí být kladné číslo) má pouze reálné kladné řešení. Ze situace znázorněné na obr.79b, které platí pro reálné kladné hodnoty výrazu $\frac{a_0 a_2 + 3 \mu k_3}{a_2^2 + 9 k_3^2}$, pak plyne, že v závislosti na velikosti výrazu $\frac{a_0 a_2 + 3 \mu k_3}{a_2^2 + 9 k_3^2}$ mohou

mít funkce $F_1(R_0^2)$ a $F_2(R_0^2)$ buď jeden společný bod, resp. dva společné body, resp. tři společné body, z čehož vyplývá, že rovnice (5.130) může mít buď jedno kladné reálné řešení a dvě komplexně sdružená řešení, resp. jedno reálné kladné řešení a dvojnásobné reálné záporné řešení, resp. jedno reálné kladné řešení a dvě reálná záporná řešení. Jelikož však i v případě třech reálných řešení kubické rovnice (5.130) pro kvadrát amplitudy R_0^2 jsou dvě řešení reálná záporná (viz. obr.79b), a jelikož druhá mocnina amplitudy R_0^2 musí mít z hlediska fyzikálního smyslu reálnou kladnou hodnotu, potom i v tomto případě existuje pouze jedna hodnota amplitudy ustálených vynucených kmitů.

Na základě výše uvedeného rozboru možných řešení kubické rovnice (5.130) pro neznámou hodnotu kvadrátu amplitudy R_0^2 je zřejmé, že amplituda R_0 ustálených vynucených kmitů pohonu při odezvě na harmonický budící signál je **jednoznačně** definována, přičemž analytický výraz pro stanovení hodnoty amplitudy R_0 , který lze získat poměrně jednoduše metodami lineární algebry, má následující tvar

$$R_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}} \right]} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}} \right]} - \frac{8}{3} \frac{a_0 a_2 + 3\mu k_3}{a_2^2 + 9k_3^2}, \quad (5.134)$$

kde veličiny p , q jsou dány výrazy

$$p = 48 \frac{a_0^2 + \mu^2}{a_2^2 + 9k_3^2} - 64 \left[\frac{a_0 a_2 + 3\mu k_3}{a_2^2 + 9k_3^2} \right]^2, \quad (5.135)$$

$$q = \frac{1024}{27} \left[\frac{a_0 a_2 + 3\mu k_3}{a_2^2 + 9k_3^2} \right]^3 - \frac{128}{3} \frac{a_0^2 + \mu^2}{a_2^2 + 9k_3^2} \frac{a_0 a_2 + 3\mu k_3}{a_2^2 + 9k_3^2} - \frac{16D^2}{a_2^2 + 9k_3^2}.$$

Uvažíme-li nyní, že velikost pomocných veličin a_0 , a_2 , μ , k_3 závisí na velikosti úhlové frekvence ω_0 budícího harmonického signálu (viz. vztahy (5.111) a (5.114), potom nám vztah (5.130), resp. (5.134) představuje amplitudovou-frekvenční charakteristiku v implicitním, resp. explicitním tvaru, jejíž analýzou můžeme získat důležité informace o chování pohonové soustavy při její odezvě na harmonický budící signál v závislosti na velikosti úhlové frekvence ω_0 . Za tím účelem je vhodné převést rovnici (5.130) do následujícího implicitního tvaru

$$G(R_0, \omega_0) \equiv (\alpha_2^2 \omega_0^2 + 9\kappa_3^2) R_0^6 + 8(\alpha_0 \alpha_2 \omega_0^2 + 3(\Omega^2 - \omega_0^2) \kappa_3) R_0^4 + 16(\alpha_0^2 \omega_0^2 + (\Omega^2 - \omega_0^2)^2) R_0^2 - 16(C_1 \omega_0^2 + C_2)^2 = 0, \quad (5.136)$$

kde veličiny α_0 , α_2 a κ_3 , které již nezávisí na úhlové frekvenci ω_0 , jsou dány výrazy

$$\alpha_0 = \frac{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_l^Z}{\tau_M \hat{I}_{red}}, \quad \alpha_2 = \frac{3\beta_3^Z}{\hat{I}_{red}}, \quad \kappa_3 = \frac{\beta_3^Z - \beta_3^M}{\tau_M \hat{I}_{red}}. \quad (5.137)$$

Derivujeme-li totálně rovnici (5.136) podle úhlové frekvence ω_0 , pak uvažíme-li, že $R_0 = R_0(\omega_0)$, potom pro tuto derivaci platí

$$\frac{dG(R_0, \omega_0)}{d\omega_0} \equiv \frac{\partial G(R_0, \omega_0)}{\partial \omega_0} + \frac{\partial G(R_0, \omega_0)}{\partial R_0} \frac{dR_0}{d\omega_0} = 0,$$

odkud po jednoduché úpravě dostaneme následující výraz pro změnu amplitudy R_0 ustáleného vynuceného kmitání v závislosti na změně budící úhlové frekvence ω_0

$$\frac{dR_0}{d\omega_0} = - \frac{\frac{\partial G(R_0, \omega_0)}{\partial \omega_0}}{\frac{\partial G(R_0, \omega_0)}{\partial R_0}}, \quad (5.138)$$

kde jednotlivé parciální derivace funkce $G(R_0, \omega_0)$ jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(R_0, \omega_0)}{\partial \omega_0} = & 64(R_0^2 - C_1^2) \omega_0 \left\{ \omega_0^2 - \frac{3\kappa_3 R_0^2 + 4\Omega^2}{4(R_0^2 - C_1^2)} R_0^2 - \right. \\ & \left. - \frac{C_1 C_2}{(R_0^2 - C_1^2)} + \frac{(\alpha_2 R_0^2 + 4\alpha_0)^2}{32(R_0^2 - C_1^2)} R_0^2 \right\}, \end{aligned} \quad (5.139)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(R_0, \omega_0)}{\partial R_0} = 6(\alpha_2^2 \omega_0^2 + 9\kappa_3^2) R_0 \left\{ \frac{16}{3} \frac{\alpha_0^2 \omega_0^2 + (\Omega^2 - \omega_0^2)^2}{\alpha_2^2 \omega_0^2 + 9\kappa_3^2} + \right. \\ \left. + \frac{16}{3} \frac{\alpha_0 \alpha_2 \omega_0^2 + 3(\Omega^2 - \omega_0^2)\kappa_3}{\alpha_2^2 \omega_0^2 + 9\kappa_3^2} R_0^2 + R_0^4 \right\}. \end{aligned} \quad (5.140)$$

Vezmeme-li nyní v úvahu, že amplitudy R_0 ustálených vynucených kmitů jsou reálná kladná čísla, potom je ihned zřejmé, že výraz (5.140) nabývá reálných kladných hodnot, takže o průběhu amplitudových frekvenčních křivek rozhoduje znaménko čitatele v rovnici (5.138), tj. jakých hodnot nabývá vztah (5.139). Provedeme-li ve vztahu (5.139) limitní přechod $\omega_0 \rightarrow 0$, vidíme, že platí

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{\partial G(R_0, \omega_0)}{\partial \omega_0} = 0, \quad (5.141)$$

tj. amplitudová frekvenční křivka má v bodě $\omega_0 = 0$ vždy vodorovnou tečnu, přičemž odpovídající amplituda ustálených vynucených kmitů je dána vztahem

$$R_0(0) \equiv \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} R_0(\omega_0) = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{w}{729} + \sqrt{\frac{4U}{81}}} + \sqrt[3]{\frac{w}{729} - \sqrt{\frac{4U}{81}}} - \frac{8}{9K_3}}, \quad (5.142)$$

kde veličiny w , U jsou definovány těmito vztahy

$$w = \frac{64}{K_3^3} + \frac{648 C_2^2}{\Omega^4 K_3^2}, \quad U = \frac{16}{K_3^4} \left\{ \left[\frac{8}{81 K_3} - \frac{C_2^2}{\Omega^4} \right]^2 - \left(\frac{8}{81 K_3} \right)^2 \right\}, \quad (5.143)$$

a kde konstanta K_3 je dána výrazem

$$K_3 = k_3(\Omega) = \frac{\beta_3^Z - \beta_3^M}{\tau_M \hat{I}_{red} \Omega^2}.$$

Zcela analogicky limitním přechodem $\omega_0 \rightarrow \infty$ v rovnici (5.136) dostaneme

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} G(R_0, \omega_0) \equiv 16 R_0^2 - 16 C_1^2 = 0,$$

odkud pro amplitudu ustáleného vynuceného kmitání plyne

$$R_0(\infty) \equiv \lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} R_0(\omega_0) = C_1, \quad (5.144)$$

tj. amplituda ustálených vynucených kmitů se, pro rostoucí hodnotu budící úhlové frekvence nade všechny meze, přibližuje hodnotě amplitudy úměrné kvadrátu budící úhlové frekvence. Uvážíme-li však, že vztah (5.139) můžeme zapsat také ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(R_0, \omega_0)}{\partial \omega_0} = R_0^6 + 8 \frac{\alpha_0 \alpha_2 + 3\kappa_3}{\alpha_2^2} R_0^4 + \\ + 16 \frac{\alpha_0^2 - 2(\Omega^2 - \omega_0^2)}{\alpha_2^2} R_0^2 - 32 C_1 \frac{C_1 \omega_0^2 + C_2}{\alpha_2^2}, \end{aligned} \quad (5.145)$$

potom je zřejmé, že platí

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} \frac{\partial G(R_0, \omega_0)}{\partial \omega_0} = 32 R_0^2 - 32 C_l^2,$$

což po dosazení ze vztahu (5.144) dává

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} \frac{\partial G(R_0, \omega_0)}{\partial \omega_0} = 0, \quad (5.146)$$

tj. směrnice tečny k amplitudové frekvenční charakteristice se pro rostoucí hodnotu budící úhlové frekvence nade všechny meze přibližuje nulovým hodnotám. Z toho lze usoudit, že v oblasti vyšších hodnot budící úhlové frekvence má amplitudová frekvenční charakteristika asymptotický průběh.

Poslední důležitou hodnotou při základní analýze odezvy pohonové soustavy na harmonický budící signál je velikost amplitudy ustálených vynucených kmitů při budící úhlové frekvenci ω_0 totožné s vlastní frekvencí pohonové soustavy Ω , tj. pro $\omega_0 = \Omega$. V tomto případě pro amplitudu ustálených kmitů dostáváme následující vztah

$$R_0(\Omega) = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4P^3}{27Q^2}} \right]} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4P^3}{27Q^2}} \right]} - \frac{8}{3} \frac{\bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_2^2 + 9 \bar{\kappa}_3^2}, \quad (5.147)$$

kde veličiny P , Q jsou dány výrazy

$$P = \frac{48 \bar{\alpha}_0^2}{\bar{\alpha}_2^2 + 9 \bar{\kappa}_3^2} - \left[\frac{8 \bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_2^2 + 9 \bar{\kappa}_3^2} \right]^2, \quad (5.148)$$

$$Q = \frac{2}{27} \left[\frac{8 \bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_2^2 + 9 \bar{\kappa}_3^2} \right]^3 - \frac{128}{3} \frac{\bar{\alpha}_0^3 \bar{\alpha}_2}{(\bar{\alpha}_2^2 + 9 \bar{\kappa}_3^2)^2} - \frac{16 D_\Omega^2}{\bar{\alpha}_2^2 + 9 \bar{\kappa}_3^2},$$

přičemž platí

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{\hat{I}_{red} + \tau_M \beta_l^Z}{\tau_M \hat{I}_{red} \Omega}, \quad \bar{\alpha}_2 = \frac{3 \beta_3^Z}{\hat{I}_{red} \Omega}, \quad \bar{\kappa}_3 = \frac{\beta_3^Z - \beta_3^M}{\tau_M \hat{I}_{red} \Omega^2}, \quad D_\Omega = C_l + \frac{C_2}{\Omega^2}, \quad (5.149)$$

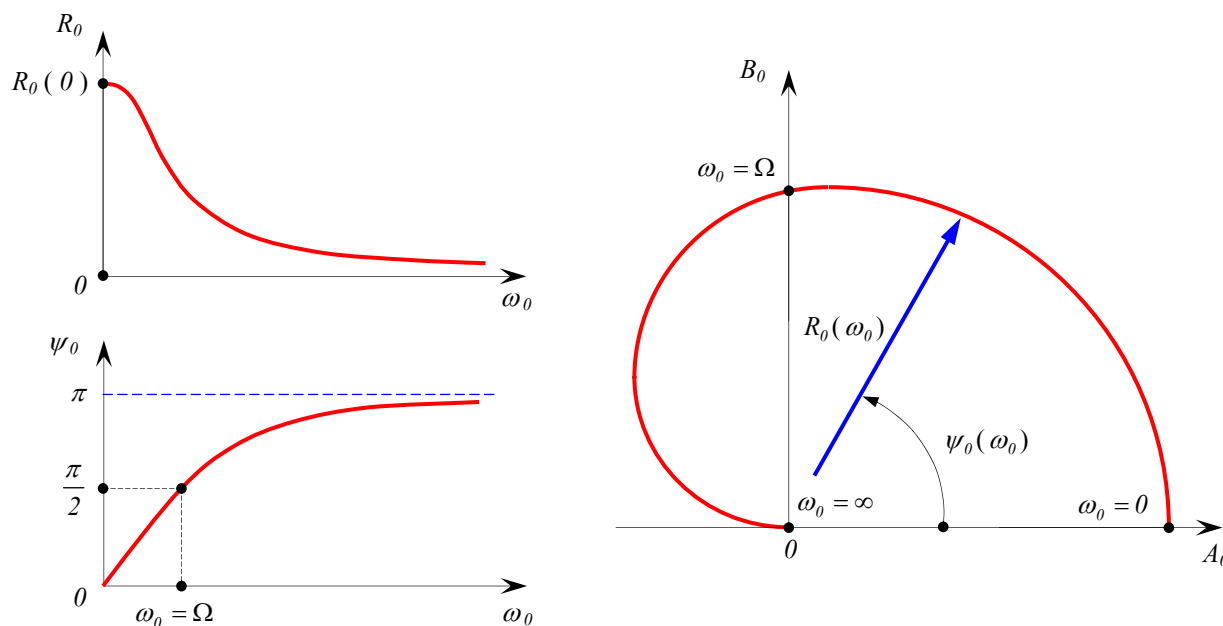
kde vlastní frekvence pohonové soustavy Ω je dána prvním výrazem v (5.114).

Analyzujeme si nyní průběh amplitudové frekvenční charakteristiky pohonové soustavy při její odezvě na harmonický budící signál. Za tím účelem si tuto analýzu rozdělíme do tří kroků, přičemž v prvním kroku provedeme analýzu při odezvě na harmonický budící signál o konstantní amplitudě (tj. pro $C_l = 0$ a $C_2 \neq 0$), ve druhém kroku pak na harmonický budící signál s amplitudou úměrnou kvadrátu budící úhlové frekvence (tj. pro $C_l \neq 0$ a $C_2 = 0$) a konečně ve třetím kroku na harmonický budící signál o konstantní amplitudě i amplitudě úměrné kvadrátu budící úhlové frekvence (tj. pro $C_l \neq 0$ a $C_2 \neq 0$):

- a) **Harmonické buzení o konstantní amplitudě.** V tomto případě platí $C_l = 0$ a $C_2 \neq 0$, což po dosazení do (5.144) dává

$$R_0(\infty) = \lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} R_0(\omega_0) = 0, \quad (5.150)$$

tj. amplituda ustálených vynucených kmitů se pro vysoké hodnoty budící úhlové frekvence asymptoticky přibližuje k nulovým hodnotám. Analyzujeme-li si pro tento případ harmonického buzení vztah (5.139) zjistíme, že tento vztah nabývá všude kladných reálných hodnot kromě bodů $\omega_0 \rightarrow 0$ a $\omega_0 \rightarrow \infty$, ve kterých je roven nule (viz. vztah (5.141) a (5.146)), což s ohledem na kladné reálné hodnoty výrazu (5.140) znamená, že směrnice tečny k amplitudové frekvenční charakteristice, definovaná vztahem (5.139), nabývá všude záporných hodnot s výjimkou bodů $\omega_0 \rightarrow 0$ a $\omega_0 \rightarrow \infty$, kde nabývá hodnot nulových (viz. obr.80).



Obr.80. Amplitudová a fázová frekvenční charakteristika pro konstantní amplitudu harmonického buzení.

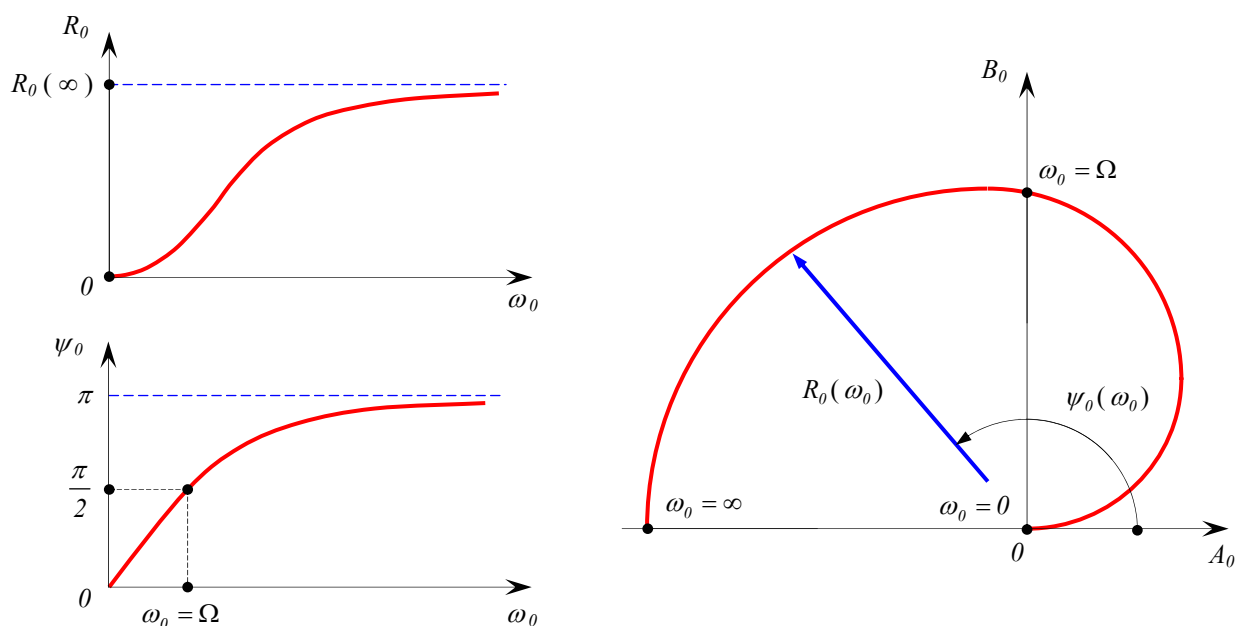
Z průběhu amplitudové frekvenční charakteristiky pohonu při odezvě na harmonický budící signál o konstantní amplitudě znázorněné na obr.80 vyplývá, že amplitudová frekvenční charakteristika je **monotónně klesající** funkcí budící úhlové frekvence, přičemž pro $\omega_0 \rightarrow 0$ nabývá amplitudová frekvenční charakteristika své maximální hodnoty, definované výrazem (5.142), kdežto pro $\omega_0 \rightarrow \infty$ se asymptoticky přibližuje k nule (viz. vztah (5.150)).

- b) **Harmonické buzení s amplitudou úměrnou kvadrátu budící úhlové frekvence.** V tomto případě platí $C_1 \neq 0$ a $C_2 = 0$, což po dosazení do (5.142) dává

$$R_0(0) \equiv \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} R_0(\omega_0) = 0, \quad (5.151)$$

tj. amplituda ustálených vynucených kmitů se pro nulové hodnoty budící úhlové frekvence také rovná nule. Analyzujeme-li si opět pro tento případ harmonického buzení vztah (4.139) zjistíme, že tento vztah nabývá téměř všude záporných reálných hodnot kromě bodů $\omega_0 \rightarrow 0$ a $\omega_0 \rightarrow \infty$, ve kterých je roven nule (viz. vztah (5.141) a (5.146)), což s ohledem na kladné reálné hodnoty výrazu (5.140) znamená, že směrnice tečny k amplitudové frekvenční charak-

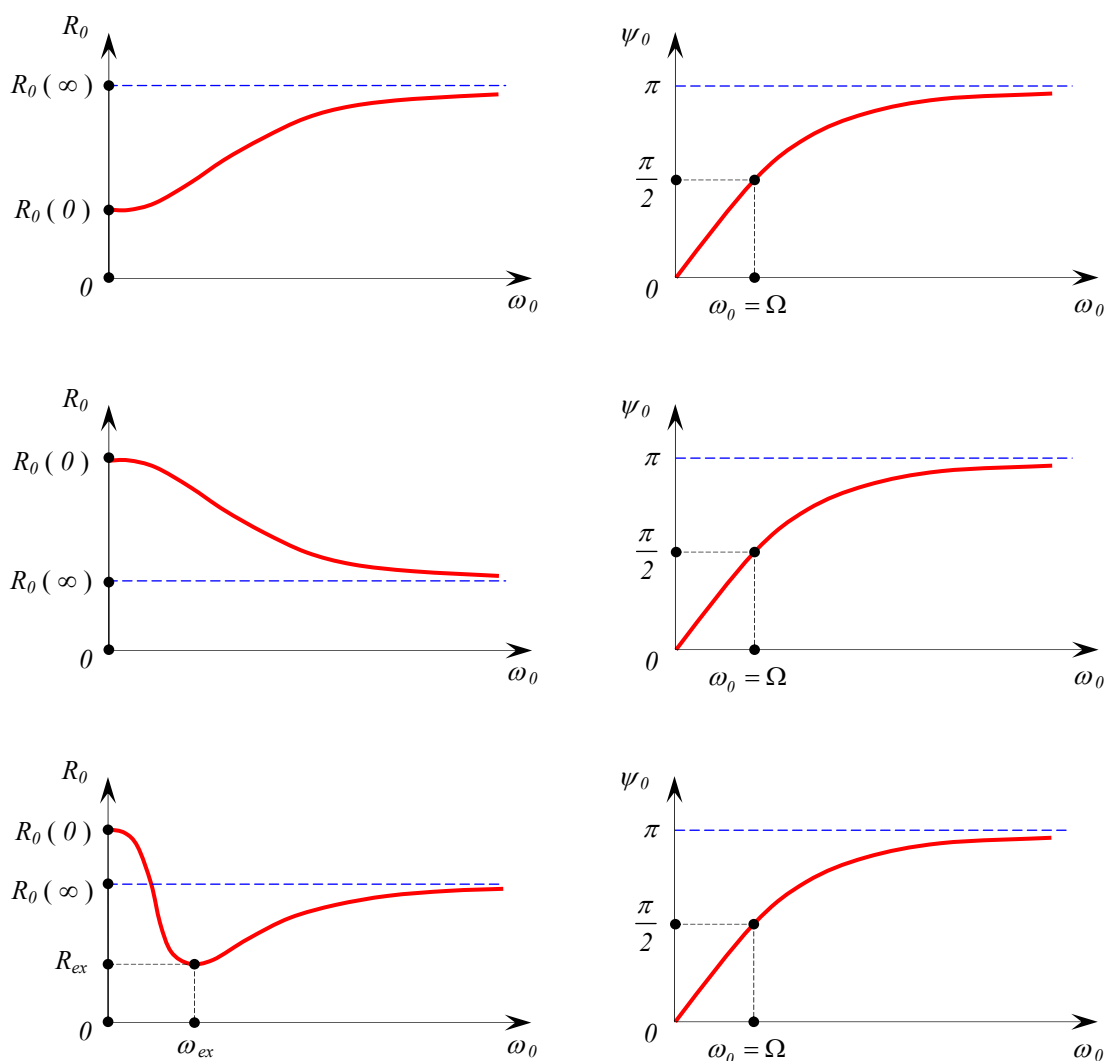
teristice, definovaná vztahem (5.139), nabývá skoro všude kladných hodnot s výjimkou bodů $\omega_0 \rightarrow 0$ a $\omega_0 \rightarrow \infty$, kde nabývá hodnot nulových (viz. obr.81).



Obr.81. Amplitudová a fázová frekvenční charakteristika pro amplitudu úměrnou kvadrátu budící frekvence.

Z průběhu amplitudové frekvenční charakteristiky pohonu při odezvě na harmonický budící signál s amplitudou úměrnou kvadrátu budící úhlové frekvence ω_0 , která je znázorněna na obr.81, vyplývá, že amplitudová frekvenční charakteristika je **monotónně rostoucí** funkcí budící úhlové frekvence, přičemž pro $\omega_0 \rightarrow 0$ nabývá amplitudová frekvenční charakteristika nulové hodnoty (viz. vztah (5.151)), kdežto pro $\omega_0 \rightarrow \infty$ se asymptoticky přibližuje hodnotě C_1 , jak plyne ze vztahu (5.144).

- c) **Harmonické buzení o konstantní amplitudě i amplitudě úměrné kvadrátu budící úhlové frekvence.** V tomto případě platí jak $C_1 \neq 0$, tak také $C_2 \neq 0$, takže amplituda ustálených vynucených kmitů nabývá nenulových hodnot jak v bodě $\omega_0 \rightarrow 0$, kde je definována výrazem (5.142), tak také v bodě $\omega_0 \rightarrow \infty$, kde je dána vztahem (5.144), přičemž v obou těchto bodech je směrnice tečny k amplitudové frekvenční charakteristice rovna nule, jak plyne ze vztahů (5.141) a (5.146). O průběhu amplitudové frekvenční charakteristiky můžeme předpokládat, že bude mít některý z tvarů znázorněných na obr.82, tj. půjde o určitou kombinaci průběhů amplitudových frekvenčních charakteristik pro harmonické buzení o konstantní amplitudě (viz. obr.80) a pro harmonické buzení o amplitudě úměrné kvadrátu budící úhlové frekvence ω_0 (viz. obr.81), přičemž o tom, který z těchto průběhů amplitudové frekvenční charakteristiky se ve skutečnosti bude realizovat, rozhoduje (při stejných hodnotách parametrů pohonové soustavy) vzájemný poměr velikosti amplitudy úměrné kvadrátu budící úhlové frekvence C_1 a konstantní amplitudy C_2 .



Obr.82. Amplitudová a fázová frekvenční charakteristiky pohonové soustavy.

Lze očekávat, že v určitém intervalu hodnot jednotlivých amplitud C_1 a C_2 , bude pro určitou hodnotu budící úhlové frekvence $\omega_0 = \omega_{ex}$ nabývat amplitudová frekvenční charakteristika extrémní hodnoty R_{ex} , tj. lokálního extrému. Polohu tohoto lokálního extrému, pokud však existuje, stanovíme z nutné podmínky existence lokálního extrému amplitudové frekvenční charakteristiky, což je ekvivalentní nulové hodnotě čitatele výrazu (5.138), tj. z rovnice

$$\frac{\partial G(R_0, \omega_0)}{\partial \omega_0} \equiv 64(R_0^2 - C_1^2) \omega_0 \left\{ \omega_0^2 - \frac{3\kappa_3 R_0^2 + 4\Omega^2}{4(R_0^2 - C_1^2)} R_0^2 - \frac{C_1 C_2}{(R_0^2 - C_1^2)} + \frac{(\alpha_2 R_0^2 + 4\alpha_0)^2}{32(R_0^2 - C_1^2)} R_0^2 \right\} = 0, \quad (5.152)$$

do které však musíme za amplitudu R_0 ustálených vynucených kmitů dosadit výraz (5.134), čímž dostaneme transcendentní rovnici, jejíž řešení je nutno provádět v převážné většině praktických případů pomocí numerických metod.

Pro přesnější vystižení průběhu ustáleného vynuceného kmitání je nutné, v důsledku přítomnosti sudých členů vratných momentů na pravé straně pohybové rovnice (5.112), uvažovat také jev usměrňování, což znamená, že předpokládané řešení (5.115) pohybové rovnice (5.112) bude kromě harmonických členů obsahovat i člen konstantní, který způsobuje posunutí středu kmitání, tj. řešení bude mít tvar

$$\tilde{\omega} = \Delta + A_0 \cos \tau + B_0 \sin \tau = \Delta + R_0 \cos(\tau - \psi_0), \quad (5.153)$$

kde R_0 a ψ_0 jsou amplituda a fázové posunutí ustáleného vynuceného kmitání, které jsou definovány rovnicemi (5.130) a (5.131), a kde Δ je dosud neurčená konstanta, vyjadřující asymetrii, resp. posunutí středu odpovídajícího ustáleného vynuceného kmitání. Při stanovení konstanty Δ vyjdeme z fyzikálně ověřené skutečnosti, že práce vnitřních sil působících v soustavě během periody jejího ustáleného pohybu je rovna nule^{*)}, tzn. že musí platit rovnice

$$\int_0^{2\pi} \left\{ (1 + \mu) \tilde{\omega} + k_2 \tilde{\omega}^2 + k_3 \tilde{\omega}^3 + (a_0 + a_1 \tilde{\omega} + a_2 \tilde{\omega}^2) \tilde{\omega}' \right\} d\tau = 0,$$

kterou lze, po dosažení předpokládaného řešení (4.153), psát ve tvaru

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} (1 + \mu) (\Delta + R_0 \cos(\tau - \psi_0)) d\tau - \int_0^{2\pi} a_0 R_0 \sin(\tau - \psi_0) d\tau - \\ & - \int_0^{2\pi} [a_1 (\Delta + R_0 \cos(\tau - \psi_0)) + a_2 (\Delta + R_0 \cos(\tau - \psi_0))^2] (-R_0 \sin(\tau - \psi_0)) d\tau + \\ & + \int_0^{2\pi} k_2 (\Delta + R_0 \cos(\tau - \psi_0))^2 d\tau + \int_0^{2\pi} k_3 (\Delta + R_0 \cos(\tau - \psi_0))^3 d\tau = 0, \end{aligned}$$

^{*)} Zapišeme-li si pohybovou rovnici pohonu (5.109) ve výkonovém tvaru

$$\hat{I}_{red} \ddot{\tilde{\omega}} = P(\omega_0 t) + f(\tilde{\omega}, \dot{\tilde{\omega}}),$$

tj. výkon výslednice sil je roven součtu výkonu vnějších a vnitřních sil, pak po zavedení časové transformace $\tau = \omega_0 t$, kde ω_0 je úhlová frekvence buzení, dostaneme rovnici

$$\hat{I}_{red} \omega_0^2 \tilde{\omega}'' = P(\tau) + f(\tilde{\omega}, \omega_0 \tilde{\omega}').$$

Integrujeme-li tuto rovnici v intervalu jedné periody poruchové funkce $P(\tau)$, potom platí rovnice

$$\hat{I}_{red} \omega_0^2 \int_0^{2\pi} \tilde{\omega}'' d\tau = \int_0^{2\pi} P(\tau) d\tau + \int_0^{2\pi} f(\tilde{\omega}, \omega_0 \tilde{\omega}') d\tau.$$

Uvážíme-li nyní, že poruchová funkce $P(\tau)$ a ustálená odezva pohonu jsou periodické funkce s periodou 2π , potom integrál na levé straně rovnice a první integrál na pravé straně rovnice jsou rovny nule, takže můžeme psát

$$\int_0^{2\pi} f(\tilde{\omega}, \omega_0 \tilde{\omega}') d\tau = 0,$$

což vyjadřuje skutečnost, že práce vnitřních sil během periody pohybu je rovna nule.

odkud po integraci a po dosazení za jednotlivé veličiny ze vztahů (5.114), obdržíme pro neznámou konstantu Δ následující rovnici

$$\Delta^3 + \frac{\beta_2^Z - \beta_2^M}{\beta_3^Z - \beta_3^M} \Delta^2 + \left[\frac{\beta_1^Z - \beta_1^M}{\beta_3^Z - \beta_3^M} + \frac{3}{2} R_0^2 \right] \Delta + \frac{1}{2} \frac{\beta_2^Z - \beta_2^M}{\beta_3^Z - \beta_3^M} R_0^2 = 0, \quad (5.154)$$

která je vlastně kubickou rovnicí, jejímž řešením můžeme obdržet buď tři reálná řešení nebo jedno reálné a dvě komplexně sdružená řešení.

Analyzujme si nyní počet možných reálných řešení kubické rovnice (5.154) v závislosti na hodnotách jednotlivých koeficientů v této rovnici. Za tím účelem si rovnici (5.154) přepíšeme na tvar

$$\Delta \left[\Delta^2 + \frac{\beta_1^Z - \beta_1^M}{\beta_3^Z - \beta_3^M} + \frac{3}{2} R_0^2 \right] = -\frac{1}{2} \frac{\beta_2^Z - \beta_2^M}{\beta_3^Z - \beta_3^M} (R_0^2 + 2 \Delta^2), \quad (5.155)$$

tj. řešení definujeme jako průsečík dvou funkcí, definovaných vztahy

$$\begin{aligned} G_1(\Delta) &= \Delta \left[\Delta^2 + \frac{\beta_1^Z - \beta_1^M}{\beta_3^Z - \beta_3^M} + \frac{3}{2} R_0^2 \right], \\ G_2(\Delta) &= -\frac{1}{2} \frac{\beta_2^Z - \beta_2^M}{\beta_3^Z - \beta_3^M} (R_0^2 + 2 \Delta^2). \end{aligned} \quad (5.156)$$

Uvážíme-li však skutečnost, že na základě druhé podmínky stability rovnovážného stavu (5.48b) a na základě podmínky (5.78) zamezení vzniku reálné bifurkace při $\beta_2^Z = \beta_2^M$, se požaduje platnost následujících nerovností mezi charakteristikami motoru a pracovního stroje

$$\beta_1^Z - \beta_1^M \geq 0, \quad \beta_3^Z - \beta_3^M > 0,$$

potom je zřejmé, že vždy platí

$$\frac{\beta_1^Z - \beta_1^M}{\beta_3^Z - \beta_3^M} + \frac{3}{2} R_0^2 > 0. \quad (5.157)$$

Znázorníme-li si průběhy funkcí $G_1(\Delta)$ a $G_2(\Delta)$ v závislosti na hodnotě Δ , obdržíme situaci jenž je znázorněna na obr.83, odkud je zřejmé, že funkce $G_1(\Delta)$ a $G_2(\Delta)$ se protínají pouze v jediném bodě, který leží buď v levé nebo pravé polorovině reálných čísel, což závisí na tom zda platí buď $\beta_2^Z - \beta_2^M > 0$ nebo $\beta_2^Z - \beta_2^M < 0$. Z toho tedy vyplývá, že kubická rovnice (5.154) má pouze jedno reálné řešení, takže velikost konstantního členu Δ je určena jednoznačně, přičemž analytický vztah pro stanovení hodnoty tohoto členu, který lze získat metodami lineární algebry, má tvar

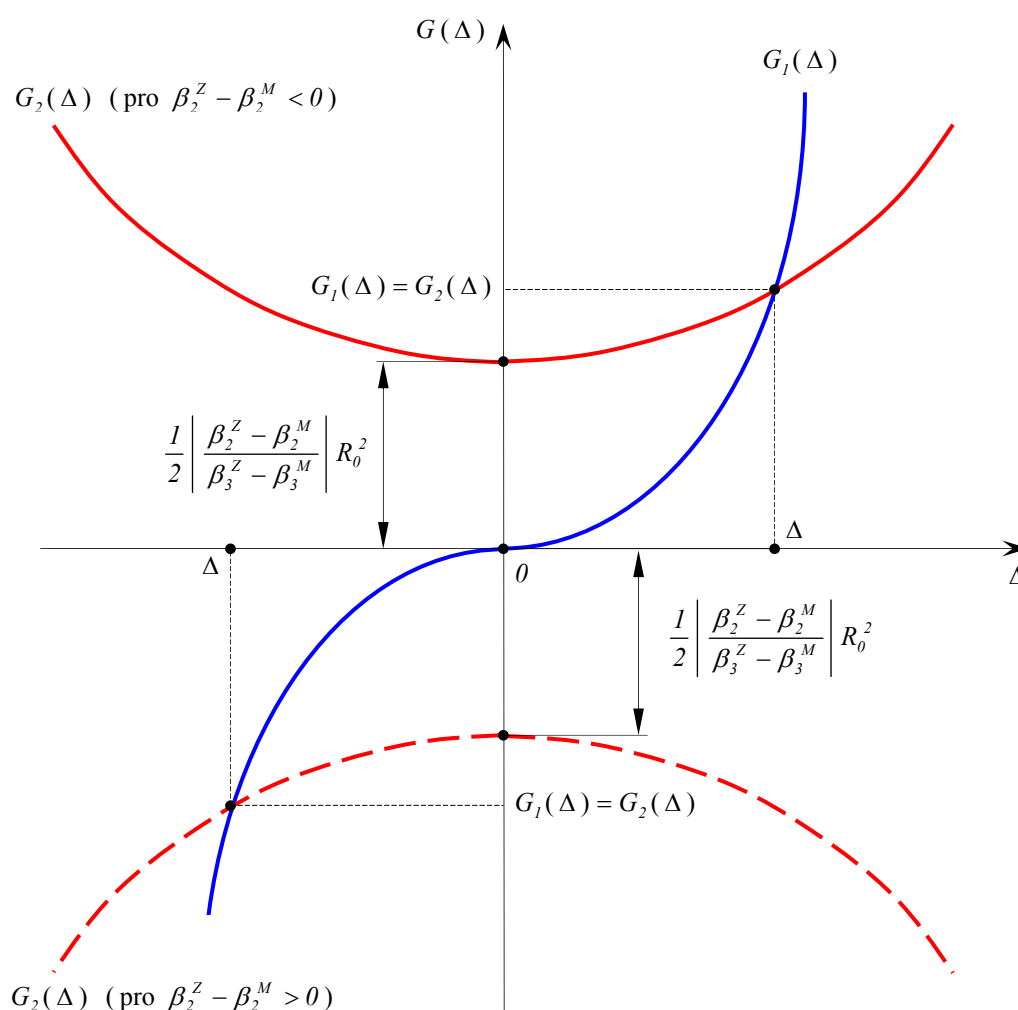
$$\Delta = \sqrt[3]{-\frac{\varepsilon}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4\sigma^3}{27\varepsilon^2}} \right]} + \sqrt[3]{-\frac{\varepsilon}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^3}{27\varepsilon^2}} \right]} - \frac{1}{3} \frac{\beta_2^Z - \beta_2^M}{\beta_3^Z - \beta_3^M}, \quad (5.158)$$

kde veličiny ε a σ jsou definovány výrazy

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \frac{\beta_2^Z - \beta_2^M}{\beta_3^Z - \beta_3^M} \left\{ 2 \left[\frac{1}{3} \frac{\beta_2^Z - \beta_2^M}{\beta_3^Z - \beta_3^M} \right]^2 - \frac{\beta_1^Z - \beta_1^M}{\beta_3^Z - \beta_3^M} \right\}, \quad (5.159a)$$

$$\sigma = \frac{\beta_1^Z - \beta_1^M}{\beta_3^Z - \beta_3^M} - \frac{1}{3} \left[\frac{\beta_2^Z - \beta_2^M}{\beta_3^Z - \beta_3^M} \right]^2 + \frac{3}{2} R_0^2, \quad (5.159b)$$

a kde R_0 je amplituda ustálených vynucených kmitů, kterou vypočteme z rovnice (5.134). Analýza vztahu (5.158), v závislosti na úhlové frekvenci buzení ω_0 , se jeví z praktického hlediska poměrně složitá, protože závisí na druhých a třetích odmocninách z amplitudy R_0 ustálených vynucených kmitů, která je sama o sobě dána poměrně složitým výrazem (viz. vztah (5.134)).



Obr.83. Znázornění řešení rovnice (5.154) jako průsečík křivek $G_1(\Delta)$ a $G_2(\Delta)$.

Hledejme proto možná zjednodušení rovnice (5.155), která by nám poskytla jednodušší, ale kvalitativně i kvantitativně dobře vyhovující vztah pro konstantní člen Δ . Za tím účelem je vhodné se zamyslet nad velikostí jednotlivých členů v rovnici (5.155). Vezmeme-li v úvahu, na základě prakticky ověřených zkušeností, že amplituda R_0 ustálených kmitů je přibližně více jak pětikrát větší než konstantní člen Δ , můžeme psát následující odhady

$$R_0^2 + 2 \Delta^2 = R_0^2 \left[1 + 2 \frac{\Delta^2}{R_0^2} \right] \leq R_0^2 \left[1 + \frac{2}{25} \right] \Rightarrow R_0^2 + 2 \Delta^2 \cong R_0^2, \quad (5.160)$$

$$\frac{3}{2} R_0^2 + \Delta^2 = \frac{3}{2} R_0^2 \left[1 + \frac{2 \Delta^2}{3 R_0^2} \right] \leq \frac{3}{2} R_0^2 \left[1 + \frac{2}{75} \right] \Rightarrow \frac{3}{2} R_0^2 + \Delta^2 \cong \frac{3}{2} R_0^2.$$

Využijeme-li těchto odhadů v rovnici (5.155), dostaneme zjednodušený vztah ve tvaru

$$\Delta \left[\frac{\beta_1^Z - \beta_1^M}{\beta_3^Z - \beta_3^M} + \frac{3}{2} R_0^2 \right] = -\frac{1}{2} \frac{\beta_2^Z - \beta_2^M}{\beta_3^Z - \beta_3^M} R_0^2, \quad (5.161)$$

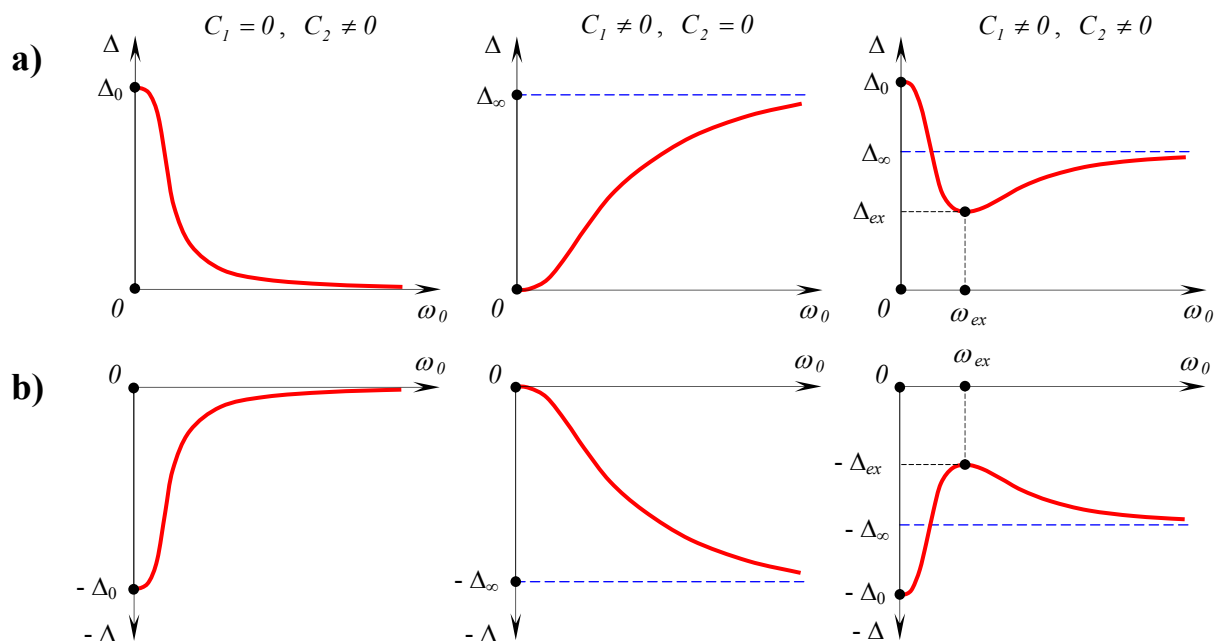
z něhož pro konstantní člen Δ vyplývá následující výraz

$$\Delta = -\frac{\frac{1}{2} \frac{\beta_2^Z - \beta_2^M}{\beta_1^Z - \beta_1^M} R_0^2}{1 + \frac{3}{2} \frac{\beta_3^Z - \beta_3^M}{\beta_1^Z - \beta_1^M} R_0^2}, \quad (5.162)$$

který lze však ještě dále zjednodušit, protože v reálných pohonových soustavách můžeme, poměrně s malou relativní chybou, položit ve vztahu (5.162) jmenovatel přibližně rovný jedné. Tímto dostáváme pro hodnotu posunutí středu kmitání Δ rovnici

$$\Delta = -\frac{1}{2} \frac{\beta_2^Z - \beta_2^M}{\beta_1^Z - \beta_1^M} R_0^2, \quad (5.163)$$

která, poskytuje velmi dobré výsledky jak kvalitativního, tak také kvantitativního charakteru.



Obr.84. Závislost konstantního členu Δ na úhlové frekvenci ω_0 pro: a) $\beta_2^Z - \beta_2^M < 0$, b) $\beta_2^Z - \beta_2^M > 0$.

Znázorníme-li si závislost konstantního členu Δ na velikosti budící úhlové frekvence ω_0 , dostaneme situaci uvedenou na obr.84. Ze vztahu (5.163), resp. srovnáním jednotlivých grafických závislostí $\Delta(\omega_0)$ na obr.84 s amplitudovými frekvenčními charakteristikami na obr.80 až obr.82 (pro odpovídající charakter amplitudy harmonického buzení), je ihned zřejmé, že z kvalitativního hlediska není žádný rozdíl mezi průběhem závislosti velikosti konstantního členu $\Delta(\omega_0)$ a průběhem amplitudových frekvenčních křivek. Z praktického hlediska to tedy znamená, že všechny kvalitativní informace (zjištěné ať již analyticky, numericky nebo experimentálně) o průběhu amplitudových frekvenčních křivek lze přenést na průběh závislosti velikosti konstantního členu $\Delta(\omega_0)$, bez nutnosti tuto závislost nějakým způsobem zjišťovat, což platí zcela pochopitelně i naopak.

5.3.2. Stabilita ustálené odezvy pohonové soustavy

Při vyšetřování stability ustálené odezvy pohonové soustavy na harmonické buzení, vyjdeme ze soustavy (5.128) obyčejných diferenciálních rovnic 1.řádu, popisujících časovou změnu amplitudy a fázového posunutí odezvy pohonové soustavy na harmonické buzení, ve kterých si jednotlivé proměnné vyjádříme ve tvaru součtu ustáleného řešení a poruchové složky, tj. ve tvaru

$$R(\tau) = R_0 + r(\tau), \quad \psi(\tau) = \psi_0 + \varphi(\tau), \quad (5.164)$$

kde R_0 , resp. ψ_0 je amplituda, resp. fázové posunutí ustáleného vynuceného kmitání, tedy veličiny, které nezávisí na čase (tj. jejich časová derivace je rovna nule), a kde $r(\tau)$, resp. $\varphi(\tau)$ jsou poruchové funkce amplitudy, resp. fázového posunutí, které jsou však již časově závislé. Dosadíme-li vztahy (5.164) do rovnic (5.128), pak po jednoduchých úpravách obdržíme soustavu diferenciálních rovnic pro poruchové funkce v následujícím tvaru

$$\begin{aligned} r' &= \frac{D}{2} \sin(\psi_0 + \varphi) - \frac{a_0}{2} (R_0 + r) - \frac{a_2}{8} (R_0 + r)^3, \\ (R_0 + r) \varphi' &= \frac{D}{2} \cos(\psi_0 + \varphi) - \frac{\mu}{2} (R_0 + r) - \frac{3k_3}{8} (R_0 + r)^3, \end{aligned} \quad (5.165)$$

jejichž řešením dostaneme závislost poruchových funkcí na čase, tj. $r = r(\tau)$ a $\varphi = \varphi(\tau)$, což nám potom umožňuje posoudit stabilitu ustáleného vynuceného kmitání. Jelikož nalezení řešení rovnic (5.165) v uzavřeném tvaru není pro libovolně velké poruchové funkce možné, budeme tyto rovnice řešit přibližným způsobem. Přibližný způsob řešení rovnic (5.165) spočívá na předpokladu, že velikost poruchových funkcí je dostatečně malá vzhledem k hodnotám parametrů ustáleného stavu, tj. platí-li $R_0 \gg r(\tau)$ a $\psi_0 \gg \varphi(\tau)$. Je-li tento předpoklad splněn, potom lze přibližně položit

$$\begin{aligned} (R_0 + r) \varphi' &\doteq R_0 \varphi', \\ \sin(\psi_0 + \varphi) &\doteq \sin \psi_0 + \varphi \cos \psi_0, \\ \cos(\psi_0 + \varphi) &\doteq \cos \psi_0 - \varphi \sin \psi_0, \\ (R_0 + r)^3 &\doteq R_0^3 + 3 R_0^2 r, \end{aligned} \quad (5.166)$$

což po dosazení do (5.165) dává linearizované rovnice pro rušivé funkce ve tvaru

$$\begin{aligned} r' &= \frac{D}{2} \sin \psi_0 + \frac{D \cos \psi_0}{2 R_0} \rho - \frac{a_0}{2} R_0 - \frac{a_2}{8} R_0^3 - \frac{1}{2} \left[a_0 + \frac{3 a_2}{4} R_0^2 \right] r, \\ \rho' &= \frac{D}{2} \cos \psi_0 - \frac{D \sin \psi_0}{2 R_0} \rho - \frac{\mu}{2} R_0 - \frac{3 k_3}{8} R_0^3 - \frac{1}{2} \left[\mu + \frac{9 k_3}{4} R_0^2 \right] r, \end{aligned} \quad (5.167)$$

kde byla zavedena nová proměnná ρ vztahem

$$\rho = R_0 \varphi \Rightarrow \rho' = R_0 \varphi'. \quad (5.168)$$

Uvážíme-li nyní platnost definičních rovnic (5.129) pro ustálené hodnoty amplitudy a fázového posunutí, pak po elementárních úpravách rovnic (5.168) dostaneme

$$\begin{aligned} r' &= -\frac{1}{2} \left[a_0 + \frac{3 a_2}{4} R_0^2 \right] r + \frac{1}{2} \left[\mu + \frac{3 k_3}{4} R_0^2 \right] \rho, \\ \rho' &= -\frac{1}{2} \left[\mu + \frac{9 k_3}{4} R_0^2 \right] r - \frac{1}{2} \left[a_0 + \frac{a_2}{4} R_0^2 \right] \rho, \end{aligned} \quad (5.169)$$

což je soustava homogenních lineárních diferenciálních rovnic 1.řádu s konstantními koeficienty, jejíž řešení předpokládáme ve tvaru

$$r(\tau) = C_r e^{\lambda \tau}, \quad \rho(\tau) = C_\rho e^{\lambda \tau}. \quad (5.170)$$

Dosadíme-li předpokládané řešení (5.170) do soustavy (5.169), potom po elementárních úpravách dostaneme následující soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámé konstanty C_r , C_ρ

$$\begin{aligned} \left\{ \lambda + \frac{1}{2} \left[a_0 + \frac{3 a_2}{4} R_0^2 \right] \right\} C_r - \frac{1}{2} \left[\mu + \frac{3 k_3}{4} R_0^2 \right] C_\rho &= 0, \\ \frac{1}{2} \left[\mu + \frac{9 k_3}{4} R_0^2 \right] C_r + \left\{ \lambda + \frac{1}{2} \left[a_0 + \frac{a_2}{4} R_0^2 \right] \right\} C_\rho &= 0. \end{aligned} \quad (5.171)$$

Jelikož soustava lineárních rovnic (5.171) je homogenní, potom pro netriviální hodnoty konstant C_r a C_ρ musí být determinant této soustavy roven nule, což znamená, že neznámé konstanty C_r a C_ρ musí být lineárně závislé. Z podmínky nulové hodnoty determinantu soustavy (5.171) vyplývá, že hodnoty exponentu λ musí splňovat tzv. charakteristickou rovnici

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \frac{2 a_0 + a_2 R_0^2}{2} \lambda + \\ + \frac{1}{4} \left[\frac{3 a_2^2 + 27 k_3^2}{16} R_0^4 + (a_0 a_2 + 3 \mu k_3) R_0^2 + (a_0^2 + \mu^2) \right] &= 0, \end{aligned} \quad (5.172)$$

jejímž řešením obdržíme vždy dvě hodnoty exponentu λ , jež jsou v obecném případě komplexními čísly. Je zřejmé, že mají-li exponenty λ kladné, resp. záporné reálné části, potom poruchové funkce $r(\tau)$ a $\varphi(\tau)$ s rostoucím časem nabývají nekonečných, resp. nulových hodnot. To tedy znamená, že ustálená odezva pohonové soustavy na harmonické buzení, definovaná amplitudou a fázovým posunutím ustálených vynucených kmitů, je asymptoticky Ljapunovsky stabilní tehdy a jen tehdy, jestliže reálné části exponentů λ nabývají záporných hodnot. Použijeme-li k posouzení charakteru

reálných částí exponentů λ , jakožto kořenů charakteristické rovnice (5.172), např. Hurwitzova kritéria, pak nutnou a postačující podmínkou záporných hodnot reálných částí exponentů λ je, aby parametry pohonu splňovaly následující dvě nerovnice

$$\text{I.} \quad \frac{2 a_0 + a_2 R_0^2}{2} > 0, \quad (5.173a)$$

$$\text{II.} \quad \frac{3 a_2^2 + 27 k_3^2}{16} R_0^4 + (a_0 a_2 + 3 \mu k_3) R_0^2 + (a_0^2 + \mu^2) > 0, \quad (5.173b)$$

které nám vlastně představují hledané podmínky stability ustálené odezvy pohonové soustavy na harmonický budící signál.

Pokusme se nyní, přeformulovat obě podmínky stability (5.173) ustáleného stavu pohonu při odezvě na harmonický budící signál tak, aby měly z praktického hlediska co možná nejjednodušší grafické vyjádření, tj. aby bylo možné poměrně rychle nakreslit pro určité hodnoty parametrů pohonové soustavy a danou budící úhlovou frekvenci ω_0 oblasti stabilní a nestabilní ustálené odezvy. Za tím účelem musíme nejdříve původní nerovnice (5.173), pomocí vhodných substitucí, převést na co možná nejjednodušší analytický tvar. Začneme nejdříve podmínkou stability (5.173b) u které přeskupíme členy následujícím způsobem

$$\left[\frac{3 a_2^2}{16} R_0^4 + a_0 a_2 R_0^2 + a_0^2 \right] + \left[\frac{27 k_3^2}{16} R_0^4 + 3 \mu k_3 R_0^2 + \mu^2 \right] > 0.$$

Uvážíme-li nyní, že jednotlivé členy v hranatých závorkách na levé straně výše uvedené nerovnice je možné zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{3 a_2^2}{16} R_0^4 + a_0 a_2 R_0^2 + a_0^2 &= \left[\frac{\sqrt{3}}{4} a_2 R_0^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} a_0 \right]^2 - \frac{a_0^2}{3}, \\ \frac{27 k_3^2}{16} R_0^4 + 3 \mu k_3 R_0^2 + \mu^2 &= \left[\frac{3 \sqrt{3}}{4} k_3 R_0^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \mu \right]^2 - \frac{\mu^2}{3}, \end{aligned}$$

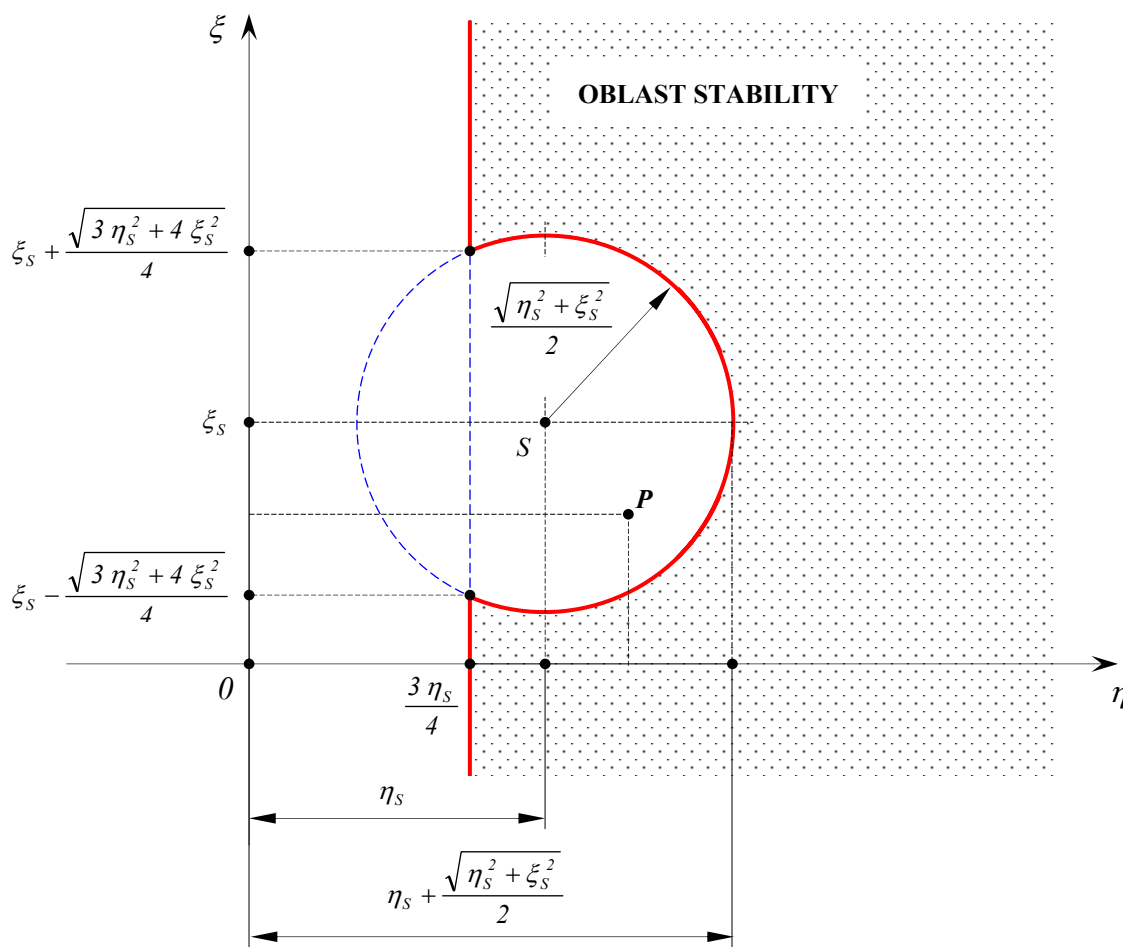
potom lze podmínku stability (5.173b) vyjádřit touto nerovnicí

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{4} a_2 R_0^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} a_0 \right]^2 + \left[\frac{3 \sqrt{3}}{4} k_3 R_0^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \mu \right]^2 > \frac{a_0^2 + \mu^2}{3}. \quad (5.174)$$

Zavedeme-li nové proměnné vztahy

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\sqrt{3}}{4} a_2 R_0^2, & \eta_s &= -\frac{2}{\sqrt{3}} a_0, \\ \xi &= \frac{3 \sqrt{3}}{4} k_3 R_0^2, & \xi_s &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \mu, \end{aligned} \quad (5.175)$$

pak je zřejmé, že podmínky stability (5.173) můžeme, s použitím vztahu (5.174) a substitucí (5.175) zapsat v následujícím jednoduchém tvaru



Obr.85. Oblast stability ustálené odezvy pohonu na harmonické buzení

$$\text{I.} \quad \eta > \frac{3\eta_s}{4}, \quad (5.176a)$$

$$\text{II.} \quad (\eta - \eta_s)^2 + (\xi - \xi_s)^2 > \frac{\eta_s^2 + \xi_s^2}{4}. \quad (5.176b)$$

Ze vztahů (5.176) vyplývá, že ustálená odezva pohonové soustavy při odezvě na harmonické buzení bude stabilní, pokud zastupující bod o souřadnicích $[\eta, \xi]$ bude ležet napravo od hraniční křivky, která je definována jako průnik přímky rovnoběžné s osou souřadnic ξ a protínající osou souřadnic η v bodě $\frac{3\eta_s}{4}$ s kružnicí se středem v bodě S o souřadnicích $[\eta_s, \xi_s]$ a poloměru $\frac{1}{2}\sqrt{\eta_s^2 + \xi_s^2}$, jak je znázorněno na obr.85 tučnou čarou. Při vyšetřování stability ustálené odezvy pohonové soustavy na harmonické buzení o úhlové frekvenci ω_0 postupujeme následujícím způsobem :

- a) pro dané parametry pohonové soustavy a pro danou velikost amplitudy a úhlové frekvence ω_0 harmonického budícího signálu vypočteme ze vztahu (5.134) amplitudu R_0 ustáleného vynuceného kmitání a ze vztahů (5.175) vypočteme veličiny η_s a ξ_s ,

- b) ze znalosti veličin η_s a ξ_s sestrojíme v souřadnicovém systému $(0, \eta, \xi)$ hraniční křivku, oddělující od sebe vzájemně oblast stabilní a nestabilní ustálené odezvy pohonu, jako průnik přímky rovnoběžné s osou souřadnic ξ a protínající osou souřadnic η v bodě $\frac{3\eta_s}{4}$ s kružnicí se středem v bodě S o souřadnicích $[\eta_s, \xi_s]$ a poloměru $\frac{1}{2}\sqrt{\eta_s^2 + \xi_s^2}$ (na obr.85 je tato hraniční křivka znázorněna tučnou čarou),
- c) ze znalosti amplitudy R_0 ustálených vynucených kmitů pak ze vztahů (5.164) vypočteme souřadnice η, ξ zastupujícího bodu a poté znázorníme jeho polohu v souřadnicovém systému $(0, \eta, \xi)$ (na obr.85 je tento zastupující bod označen jako P),
- d) provedeme kontrolu zda se zastupující bod nachází v oblasti stability (na obr.85 leží zastupující bod P vně oblasti stability, což znamená, že ustálená odezva pohonu na harmonické buzení není stabilní).

Grafického znázornění v systému souřadnic $(0, \eta, \xi)$, kterého jsme použili ke znázornění podmínek stability ustálené odezvy pohonu (5.176), lze s výhodou využít také k vyznačení oblastí různých typů kořenů λ charakteristické rovnice (5.172), na jejichž základě lze usuzovat na kvalitativní charakter přechodového děje poruchových funkcí $r(\tau), \varphi(\tau)$. Je známou skutečností, že reálným kořenům λ odpovídá aperiodický průběh přechodového děje, kdežto komplexně sdruženým kořenům λ odpovídá periodický průběh přechodového děje, přičemž oblasti reálných a komplexních kořenů λ jsou v souřadnicích $(0, \eta, \xi)$ od sebe vzájemně odděleny křivkou, jejíž rovnici získáme, položíme-li diskriminant charakteristické (v našem případě kvadratické) rovnice (5.172) roven nule

$$\left[\frac{2a_0 + a_2 R_0^2}{2} \right]^2 - \left[\frac{3a_2^2 + 27k_3^2}{16} R_0^4 + (a_0 a_2 + 3\mu k_3) R_0^2 + (a_0^2 + \mu^2) \right] = 0,$$

což po úpravě dává rovnici

$$\left[\frac{3\sqrt{3}}{4} k_3 R_0^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \mu \right]^2 - \frac{a_2^2}{16} R_0^4 = \frac{\mu^2}{3},$$

které přejde s využitím substitucí (5.175) do tvaru

$$\frac{(\xi - \xi_s)^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \quad (5.177)$$

což je **kanonický tvar rovnice hyperboly** se středem $H = [\eta_H, \xi_H] = [0, \xi_s]$, jejíž reálná osa je totožná s osou ξ a kde imaginární osa, která je v tomto případě rovnoběžná s osou η , protíná osu ξ v bodě o souřadnici ξ_s , přičemž pro délku reálné poloosy a a imaginární poloosy b platí

$$a = \frac{|\xi_s|}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{3} |\xi_s|}{2}, \quad (5.178)$$

na jejichž základě lze stanovit délkovou excentricitu hyperboly

$$e = \sqrt{a^2 + b^2} = |\xi_S|,$$

s jejíž pomocí můžeme určit souřadnice ohnisek O_1 a O_2 hyperboly

$$O_1 = [\eta_H, \xi_S + e] = [0, \xi_S + |\xi_S|],$$

$$O_2 = [\eta_H, \xi_S - e] = [0, \xi_S - |\xi_S|].$$

Jednotlivé větve hyperboly, definované rovnicí (5.177), jsou dány vztahy

$$\xi_1 = \xi_S + \frac{l}{2} \sqrt{\xi_S^2 + \frac{4}{3} \eta^2}, \quad \xi_2 = \xi_S - \frac{l}{2} \sqrt{\xi_S^2 + \frac{4}{3} \eta^2}, \quad (5.179)$$

odkud po jednoduché úpravě obdržíme pro souřadnice průsečíků hyperboly s osou η vztahy

$$\eta_1 = \frac{3}{2} |\xi_S|, \quad \eta_2 = -\frac{3}{2} |\xi_S|. \quad (5.180)$$

Důležitou charakteristikou hyperboly jsou její asymptoty. Obecně lze rovnice asymptot hyperboly, uvažíme-li že asymptoty procházejí středem hyperboly $H = [0, \xi_S]$, psát ve tvaru

$$\xi_1^{AS} = \xi_S + k_\xi \eta, \quad \xi_2^{AS} = \xi_S - k_\xi \eta,$$

kde k_ξ je směrnice asymptoty, která je dána výrazem

$$k_\xi = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{d\xi_1}{d\eta} = \frac{l}{\sqrt{3}},$$

což po dosazení do obecných rovnic asymptot dává následující výrazy

$$\xi_1^{AS} = \xi_S + \frac{\eta}{\sqrt{3}}, \quad \xi_2^{AS} = \xi_S - \frac{\eta}{\sqrt{3}}. \quad (5.181)$$

Stanovíme-li si nyní ξ -ové souřadnice jednotlivých větví hyperboly (5.177) v bodech $\eta = \frac{3\eta_S}{4}$,

dostaneme pro tyto souřadnice vztahy

$$\xi = \xi_S \pm \frac{\sqrt{3\eta_S^2 + 4\xi_S^2}}{4},$$

což odpovídá ξ -ovým souřadnicím průsečíků hranic stability jednotlivých podmínek (5.176), jak je zřejmé z obr.85. Uvažíme-li navíc, že směrnice tečny na hranici stability podmínky (5.176b), resp. na jednotlivých větvích hyperboly (5.177), je dána výrazem

$$\left[\frac{d\xi}{d\eta} \right]_{HS} = \mp 2 \frac{\eta - \eta_S}{\sqrt{\xi_S^2 + \eta_S^2 - 4(\eta - \eta_S)^2}},$$

resp. výrazem

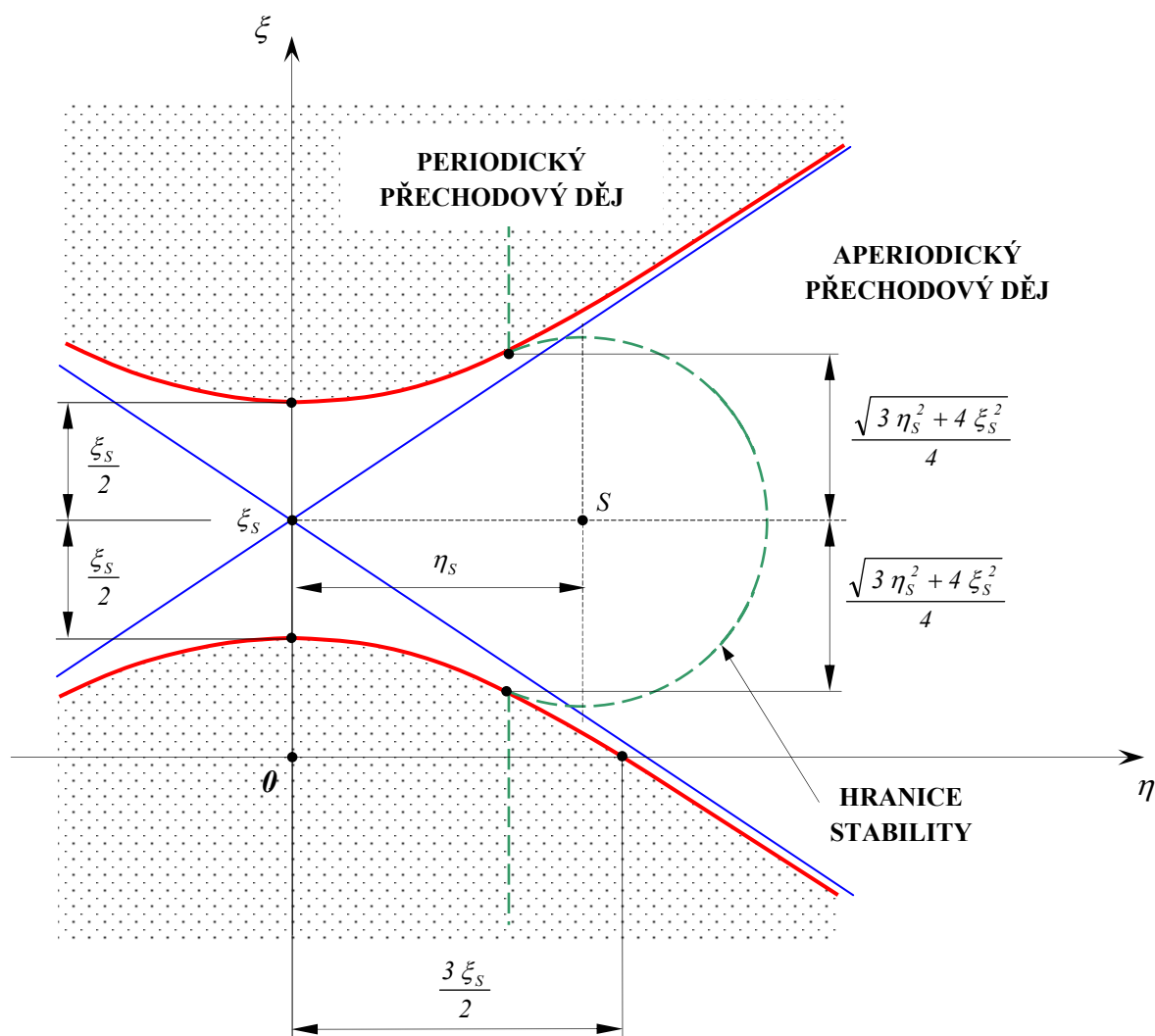
$$\left[\frac{d\xi}{d\eta} \right]_H = \pm \frac{l}{3} \frac{\eta}{\sqrt{\xi_S^2 + \frac{4}{3} \eta^2}},$$

pak po dosazení $\eta = \frac{3\eta_s}{4}$ dostaneme

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{d\xi}{d\eta} \right]_{HS} &= \pm \frac{\eta_s}{\sqrt{4\xi_s^2 + 3\eta_s^2}} \\ \left[\frac{d\xi}{d\eta} \right]_H &= \pm \frac{\eta_s}{\sqrt{4\xi_s^2 + 3\eta_s^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\frac{d\xi}{d\eta} \right]_{HS} = \left[\frac{d\xi}{d\eta} \right]_H, \quad (5.182)$$

odkud je ihned zřejmé, že v průsečících jednotlivých větví hyperboly (5.177) s hranicemi stability podmínek (5.176) ustálené odezvy pohonové soustavy mají tyto křivky také společné tečny.

Znázorníme-li si nyní graficky v souřadnicovém systému $(0, \eta, \xi)$, kterého jsme použili také ke znázornění podmínek stability (5.176) ustálené odezvy pohonové soustavy, oblasti reálných a komplexních vlastních čísel, kterým odpovídají oblasti aperiodického a periodického přechodového děje, pak na základě výše uvedených analýz obdržíme situaci znázorněnou na obr.86.



Obr.86. Oblasti aperiodického a periodického přechodového děje.

5.3.3. Topologické vlastnosti trajektorií ustálené odezvy pohonu

Z hlediska analýzy dynamických vlastností pohonové soustavy, poskytuje velmi cenné informace také znázornění trajektorie pohonové soustavy, v souřadnicovém systému $(\theta, \tilde{\omega}, \tilde{M}_M)$, při její odezvě na harmonický budící signál. Na základě průběhu těchto trajektorií lze potom usuzovat, jaký vliv mají jednotlivé parametry pohonové soustavy na dynamické vlastnosti této soustavy, což lze zpětně využít pro identifikaci parametrů pohonové soustavy na základě experimentálně stanovené trajektorie daného pohonu při její ustálené odezvě na harmonický budící signál.

Dříve než přistoupíme k podrobnému vyšetřování základních topologických vlastností ustálené odezvy pohonové soustavy při její odezvě na harmonický budící signál, musíme si nejdříve stanovit časový průběh poruchové složky momentu motoru $\tilde{M}_M = \tilde{M}_M(t)$. K tomuto účelu využijeme vztahu (5.107), který si vzhledem k platnosti identity $\tilde{\omega} = \omega_0 \tilde{\omega}'$ prepíšeme do tvaru

$$\tilde{M}_M = \hat{I}_{red} \omega_0 \tilde{\omega}' + \sum_{k=1}^n \beta_k^Z(\omega_0) \tilde{\omega}^k,$$

což v našem případě dává rovnici

$$\tilde{M}_M = \hat{I}_{red} \omega_0 \tilde{\omega}' + \beta_1^Z \tilde{\omega} + \beta_2^Z \tilde{\omega}^2 + \beta_3^Z \tilde{\omega}^3. \quad (5.183)$$

Dosadíme-li do této rovnice za $\tilde{\omega}$ výraz (5.153), dostaneme vztah

$$\begin{aligned} \tilde{M}_M = & -\hat{I}_{red} \omega_0 R_0 \sin(\tau - \psi_0) + \beta_1^Z (\Delta + R_0 \cos(\tau - \psi_0)) + \\ & + \beta_2^Z (\Delta + R_0 \cos(\tau - \psi_0))^2 + \beta_3^Z (\Delta + R_0 \cos(\tau - \psi_0))^3, \end{aligned}$$

který si můžeme, uvážíme-li platnost následujících identit

$$\begin{aligned} \cos^2(\tau - \psi_0) &= \frac{1 + \cos 2(\tau - \psi_0)}{2}, \\ \cos^3(\tau - \psi_0) &= \frac{3 \cos(\tau - \psi_0) + \cos 3(\tau - \psi_0)}{4}, \end{aligned}$$

a vezmeme-li v úvahu prakticky ověřenou skutečnost, že velikost amplitudy vyšších harmonických složek jsou řádově nižší než velikost amplitudy prvních harmonických složek, přepsat do následujícího přibližného tvaru

$$\tilde{M}_M \doteq \Delta \tilde{M} + C_I^M \cos(\tau - \psi_0) + D_I^M \sin(\tau - \psi_0), \quad (5.184)$$

tzn. jako součet konstantního členu a prvních harmonických složek, přičemž pro posunutí středu poruchové složky momentu motoru $\Delta \tilde{M}$ platí

$$\Delta \tilde{M} = \beta_3^Z \left\{ \Delta^3 + \frac{\beta_2^Z}{\beta_3^Z} \Delta^2 + \left[\frac{\beta_1^Z}{\beta_3^Z} + \frac{3}{2} R_0^2 \right] \Delta + \frac{\beta_2^Z}{2 \beta_3^Z} R_0^2 \right\}, \quad (5.185)$$

a kde amplitudy prvních harmonických složek jsou dány výrazy

$$C_I^M = \left[\beta_1^Z + 2 \beta_2^Z \Delta + 3 \beta_3^Z \Delta^2 + \frac{3}{4} \beta_3^Z R_0^2 \right] R_0, \quad D_I^M = -\hat{I}_{red} \omega_0 R_0. \quad (5.186)$$

Uvážíme-li nyní platnost rovnice (5.154) pro výpočet konstanty Δ , potom se dá ukázat, že hodnoty konstanty Δ , stanovené řešením rovnice (5.154), vyhovují také rovnici

$$\Delta^3 + \frac{\beta_2^Z}{\beta_3^Z} \Delta^2 + \left[\frac{\beta_1^Z}{\beta_3^Z} + \frac{3}{2} R_0^2 \right] \Delta + \frac{\beta_2^Z}{2 \beta_3^Z} R_0^2 = 0,$$

což znamená, že výraz ve složené závorce ve vztahu (5.185) je roven nule, takže posunutí středu poruchové složky momentu motoru je také rovno nule, tj. můžeme psát

$$\Delta \tilde{M} = \beta_3^Z \left\{ \Delta^3 + \frac{\beta_2^Z}{\beta_3^Z} \Delta^2 + \left[\frac{\beta_1^Z}{\beta_3^Z} + \frac{3}{2} R_0^2 \right] \Delta + \frac{\beta_2^Z}{2 \beta_3^Z} R_0^2 \right\} = 0. \quad (5.187)$$

Použijeme-li navíc k vyjádření konstanty Δ přibližného výrazu (5.163), potom lze vztahy pro výpočet amplitud prvních harmonických složek (5.186) přepsat ve tvaru

$$C_1^M = \left\{ \frac{\beta_1^Z}{\beta_3^Z} - \frac{\beta_2^Z}{\beta_3^Z} \frac{\beta_2^Z - \beta_2^M}{\beta_1^Z - \beta_1^M} R_0^2 + \frac{3}{4} \left[1 + \left(\frac{\beta_2^Z - \beta_2^M}{\beta_1^Z - \beta_1^M} \right)^2 \right] R_0^4 \right\} \beta_3^Z R_0, \quad (5.188)$$

$$D_1^M = -\hat{I}_{red} \omega_0 R_0,$$

které se jeví jako výhodnější z hlediska možného využití při identifikaci pohonových soustav.

Nyní, když již jsme si stanovili výraz pro časovou závislost poruchové složky momentu motoru \tilde{M}_M , můžeme přistoupit k podrobnému vyšetřování základních topologických vlastností ustálené odezvy pohonové soustavy na harmonický budící signál, která je zadána v souřadnicovém systému $(0, \tilde{\omega}, \tilde{M}_M)$ parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \Delta + R_0 \cos(\tau - \psi_0), \\ \tilde{M}_M &= C_1^M \cos(\tau - \psi_0) + D_1^M \sin(\tau - \psi_0). \end{aligned} \quad (5.189)$$

Zavedením substituce $\varphi = \tau - \psi_0$ a elementárními úpravami lze docílit následujícího tvaru parametrických rovnic (5.189)

$$\begin{aligned} \omega - \Delta &= R_0 \cos \varphi, \\ C_1(\tilde{\omega} - \Delta) - R_0 \tilde{M}_M &= -R_0 D_1^M \sin \varphi, \end{aligned}$$

který lze dále zjednodušit zavedením těchto transformací souřadnic

$$x = \frac{\tilde{\omega} - \Delta}{R_0}, \quad y = -\frac{\tilde{M}_M}{D_1^M}, \quad (5.190)$$

do tohoto tvaru

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi, \\ x \cotg \vartheta + y &= -\sin \varphi, \end{aligned} \quad (5.191)$$

kde veličina ϑ představuje fázové posunutí poruchové složky momentu motoru \tilde{M}_M vzhledem na poruchovou složku úhlové rychlosti motoru $\tilde{\omega}$. Kvadratickým umocněním rovnic (5.191) a jejich sečtením dostaneme následující algebraickou rovnici

$$(1 + \cotg^2 \vartheta) x^2 + y^2 + 2xy \cotg \vartheta - l = 0, \quad (5.192)$$

která je speciálním případem obecné algebraické rovnice druhého stupně ve tvaru

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0, \quad (5.193)$$

pro tyto hodnoty koeficientů

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 + \cotg^2 \vartheta, & a_{12} &= \cotg \vartheta, & a_{22} &= 1, \\ a_{13} &= 0, & a_{23} &= 0, & a_{33} &= -l. \end{aligned} \quad (5.194)$$

Z algebraické teorie křivek je známo, že obecnou algebraickou rovnicí druhého stupně ve tvaru (5.193) jsou matematicky vyjádřeny všechny kuželosečky, přičemž o typu kuželosečky rozhoduje, jakých hodnot nabývají **invarianty** křivky druhého stupně δ_1 , δ_2 a δ_3 , viz. tab.č.1.

	$\delta_2 \neq 0$ středové kuželosečky		$\delta_2 = 0$ nestředové kuželosečky		
	$\delta_2 > 0$	$\delta_2 < 0$			
$\delta_3 \neq 0$ vlastní kuželosečky	$\delta_3 \delta_1 < 0$ reálná elipsa	hyperbola	parabola		
	$\delta_3 \delta_1 > 0$ imaginární elipsa				
$\delta_3 = 0$ nevlastní kuželosečky	dvojice protínajících se přímek		dvojice rovnoběžek		
	imaginární přímky	reálné přímky	$a_{13}^2 - a_{11} a_{33} > 0$ dvě různé rovnoběžky	$a_{13}^2 - a_{11} a_{33} = 0$ dvě splývající rovnoběžky	$a_{13}^2 - a_{11} a_{33} < 0$ dvě imaginární rovnoběžky

Tab.č.1. Typ kuželosečky v závislosti na hodnotách invariantů δ_1 , δ_2 , δ_3 křivky druhého stupně.

Hodnoty invariantů křivky druhého stupně δ_1 , δ_2 , δ_3 jsou dány výrazy

$$\delta_1 = a_{11} + a_{22}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

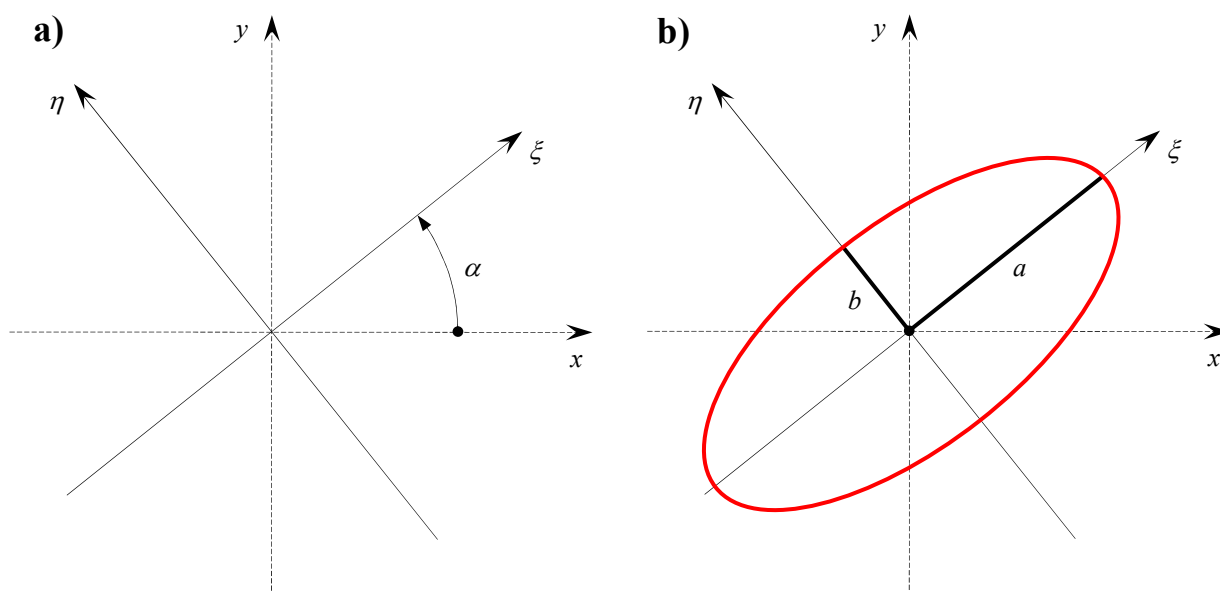
což v našem případě dává

$$\delta_1 = 2 + \cotg^2 \vartheta, \quad \delta_2 = 1, \quad \delta_3 = -1. \quad (5.195)$$

Uvážíme-li nyní, že platí

$$\delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0, \quad \delta_3 < 0, \quad \delta_1 \delta_3 < 0,$$

potom z tab.č.1 vyplývá, že algebraická rovnice (5.192) je implicitní rovnicí **reálné elipsy**. To tedy znamená, že ustálená odezva pohonové soustavy na harmonický budící signál, popsána parametrickými rovnicemi (5.191), má v souřadnicovém systému (θ, x, y) , z hlediska topologické klasifikace trajektorií, vždy tvar středové kuželosečky, a to reálné elipsy. Jelikož transformační rovnice (5.190) představují posunutí souřadnicového systému $(\theta, \tilde{\omega}, \tilde{M}_M)$, je ihned zřejmé, že ustálená odezva pohonové soustavy má v souřadnicovém systému $(\theta, \tilde{\omega}, \tilde{M}_M)$ také tvar elipsy, avšak střed této elipsy již neleží v počátku souřadnic.



Obr.87. Pootočení souřadnicového systému a), trajektorie ustálené odezvy v pootočených souřadnicích b).

Pro podrobnější analýzu tvaru trajektorie ustálené odezvy pohonové soustavy v souřadnicovém systému (θ, x, y) , si převedeme algebraickou rovnici (5.192) do normalizovaného tvaru. Toho docílíme zavedením nového souřadnicového systému (θ, ξ, η) , který je však oproti původnímu souřadnicovému systému (θ, x, y) pootočen o úhel α (viz. obr.87a), jehož hodnotu stanovíme pomocí následujícího výrazu

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{2}{\cotg \vartheta} = 2 \operatorname{tg} \vartheta \quad (5.196)$$

Uvážíme-li však, že pro hodnotu fázového posunutí ϑ mezi poruchovou složkou momentu motoru \tilde{M}_M a poruchovou složkou úhlové rychlosti motoru $\tilde{\omega}$ platí

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{D_I^M}{C_I^M},$$

pak po dosažení tohoto vztahu do (5.196), spolu s vyjádřením veličin C_I^M a D_I^M pomocí vztahů (5.188), dostaneme pro hodnotu úhlu α rovnici

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -2 \frac{\frac{\hat{I}_{red} \omega_0}{\beta_3^Z}}{\frac{\beta_1^Z}{\beta_3^Z} - \frac{\beta_2^Z}{\beta_3^Z} \frac{\beta_2^Z - \beta_2^M}{\beta_1^Z - \beta_1^M} R_0^2 + \frac{3}{4} \left[1 + \left(\frac{\beta_2^Z - \beta_2^M}{\beta_1^Z - \beta_1^M} \right)^2 \right] R_0^4}. \quad (5.197)$$

Zavedením nových souřadnic ξ , η (viz. obr.87a)

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \\ y &= \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.198)$$

přejde rovnice (5.192) do tvaru

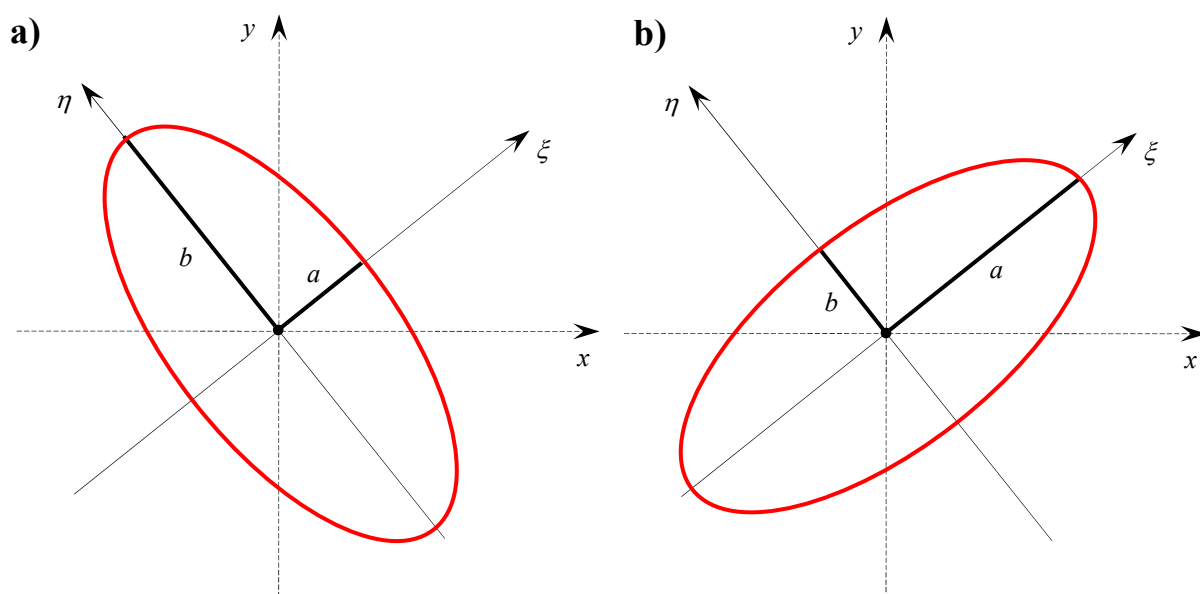
$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \quad (5.199)$$

což je **kanonický tvar** rovnice elipsy v tzv. normální poloze, tj. elipsy jejíž střed leží v počátku souřadnicového systému $(0, \xi, \eta)$ a jejíž poloosy splývají se souřadnicovými osami ξ a η (viz. obr.87b), přičemž pro délku těchto poloos platí vztahy

$$\begin{aligned} a &= \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{C_I^M}{D_I^M} \right)^2 + \frac{C_I^M}{2 D_I^M} \sqrt{4 + \left(\frac{C_I^M}{D_I^M} \right)^2} \right\}^{-0,5}, \\ b &= \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{C_I^M}{D_I^M} \right)^2 - \frac{C_I^M}{2 D_I^M} \sqrt{4 + \left(\frac{C_I^M}{D_I^M} \right)^2} \right\}^{-0,5}. \end{aligned} \quad (5.200)$$

Tvar elipsy v souřadnicovém systému $(0, \xi, \eta)$ závisí na velikostech jednotlivých poloos, jak je patrné z obr.88, přičemž poloosa o větší, resp. menší velikosti se označuje jako hlavní, resp. jako vedlejší poloosa elipsy. Ze vztahů (5.200) pro výpočet velikosti jednotlivých poloos elipsy vyplývá, že $a > b$, tzn. hlavní poloosa splývá se souřadnicovou osou ξ (viz. obr.88b), tehdy a jen tehdy, je-li poměr amplitud prvních harmonických složek poruchové složky momentu motoru \tilde{M}_M záporné číslo. Není-li tato podmínka splněna, tj. poměr amplitud prvních harmonických složek poruchové složky momentu motoru je číslo kladné, potom platí $a < b$ a hlavní poloosa elipsy splývá s osou souřadnic η (viz. obr.88a). Schématicky můžeme tedy výše uvedenou skutečnost zapsat takto

$$\begin{aligned} \frac{C_I^M}{D_I^M} < 0 &\Rightarrow a > b \Rightarrow \begin{cases} a \text{ je hlavní poloosa elipsy,} \\ b \text{ je vedlejší poloosa elipsy,} \end{cases} \\ \frac{C_I^M}{D_I^M} > 0 &\Rightarrow a < b \Rightarrow \begin{cases} a \text{ je vedlejší poloosa elipsy,} \\ b \text{ je hlavní poloosa elipsy.} \end{cases} \end{aligned}$$


 Obr.88. Tvar elipsy v závislosti na velikosti jejích poloos: a) případ $b > a$, b) případ $a > b$.

Provedeme-li vzájemný součin velikostí jednotlivých poloos elipsy, definovaných vztahy (5.200), pak zjistíme, že platí

$$\begin{aligned}
 a b &= \left\{ 1 + \frac{I}{2} \left(\frac{C_I^M}{D_I^M} \right)^2 + \frac{C_I^M}{2 D_I^M} \sqrt{4 + \left(\frac{C_I^M}{D_I^M} \right)^2} \right\}^{-0,5} \times \\
 &\times \left\{ 1 + \frac{I}{2} \left(\frac{C_I^M}{D_I^M} \right)^2 - \frac{C_I^M}{2 D_I^M} \sqrt{4 + \left(\frac{C_I^M}{D_I^M} \right)^2} \right\}^{-0,5} = \\
 &= \left\{ \left[1 + \frac{I}{2} \left(\frac{C_I^M}{D_I^M} \right)^2 \right]^2 - \left[4 + \left(\frac{C_I^M}{D_I^M} \right)^2 \right] \left(\frac{C_I^M}{2 D_I^M} \right)^2 \right\}^{-0,5} = 1,
 \end{aligned} \tag{5.201}$$

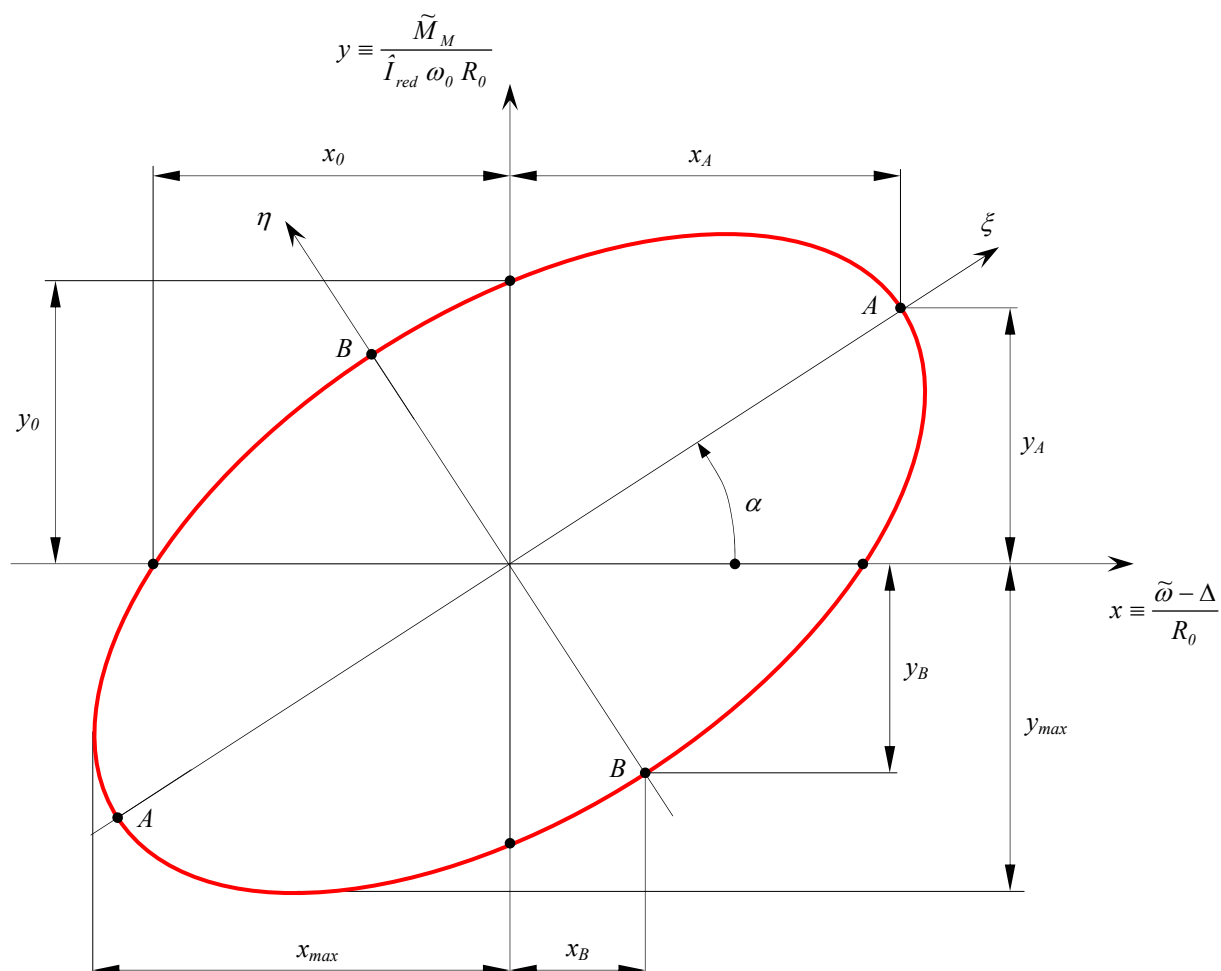
tzn. že součin poloos elipsy, jakožto trajektorie ustálené odezvy pohonové soustavy na harmonický budící signál v souřadnicovém systému $(0, x, y)$, je **vždy identicky roven jedné** a není závislý na hodnotách parametrů pohonové soustavy. Důsledkem identity (5.201) je také skutečnost, že plošný obsah elipsy, který je dán vztahem $S = \pi a b$, je v souřadnicovém systému $(0, x, y)$, pro libovolné hodnoty parametrů pohonové soustavy, vždy roven hodnotě π .

Znázorníme-li si graficky průběh trajektorie ustálené odezvy pohonové soustavy na harmonické buzení v souřadnicovém systému $(0, x, y)$, obdržíme situaci uvedenou na obr.89, kde jsou také zakótovány souřadnice význačných bodů této trajektorie, kterých lze s výhodou využít při identifikaci parametrů pohonové soustavy. Pro souřadnice těchto význačných bodů platí

$$x_A = \pm a |\cos \alpha|, \quad y_A = \pm a |\sin \alpha|, \quad x_B = \pm b |\sin \alpha|, \quad y_B = \pm b |\cos \alpha|, \tag{5.202}$$

$$x_0 = \pm \frac{l}{\sqrt{(a \sin \alpha)^2 + (b \cos \alpha)^2}}, \quad y_0 = \pm \frac{l}{\sqrt{(a \cos \alpha)^2 + (b \sin \alpha)^2}}, \quad (5.202)$$

$$x_{max} = \pm \sqrt{(a \cos \alpha)^2 + (b \sin \alpha)^2}, \quad y_{max} = \pm \sqrt{(a \sin \alpha)^2 + (b \cos \alpha)^2},$$



Obr.89. Význačné body na trajektorii ustálené odezvy pohonové soustavy.

kde a , b jsou velikosti poloos elipsy, které jsou definovány vztahy (5.200). Ze vztahů (5.202) je ihned zřejmé, že můžeme psát

$$x_0 y_{max} = \pm l, \quad x_{max} y_0 = \pm l, \quad (5.203)$$

tj. součin souřadnice x_0 průsečíku elipsy s osou x a její maximální hodnoty y_{max} ve směru souřadnicové osy y , resp. součin souřadnice y_0 průsečíku elipsy s osou y a její maximální hodnoty x_{max} ve směru souřadnicové osy x je vždy v absolutní hodnotě roven jedné.

Poznámka : Jelikož struktura vztahů (5.200) až (5.203), popisujících kvalitativně i kvantitativně trajektorii ustálené odezvy pohonové soustavy na harmonický budící signál, velmi silně závisí na použité teoretické metodě analýzy dynamických vlastností pohonových soustav, lze očekávat, že vztahy (5.200) až (5.203) budou základním „prubířským kamenem“ použité teoretické metody, a to buď v závislosti na výsledcích numerických simulací, nebo na základě kvantitativních údajů stanovených z experimentálně stanovené trajektorie ustálené odezvy pohonové soustavy na harmonický budící signál.

5.4. Přechodové děje v pohonové soustavě

Důležitou součástí analýzy dynamických vlastností pohonových soustav je i problematika přechodových dějů, zejména pak otázka doby potřebné k rozběhu nebo zastavení dané pohonové soustavy, což má význam jak z hlediska ekonomického a technologického, tak také z hlediska vyšetřování negativních účinků na okolní prostředí při havarijních stavech pohonových soustav.

Při analýzách přechodových dějů probíhajících v pohonových soustavách, zejména pak v etapě jejího konstrukčního návrhu, vycházíme z pohybových rovnic modelové soustavy pohonu ve tvaru (5.1). Uvážíme-li nyní, že v převážné většině praktických aplikací nabývají poruchové (oscilující) složky redukovaného momentu setrvačnosti, statické momentové charakteristiky motoru a zatěžujícího momentu pracovního stroje řádově menší než jejich centrované složky, pak platí

$$\hat{I}_{red} \gg \tilde{I}_{red}(\varphi), \quad \hat{M}_{MS}(\dot{\varphi}) \gg \tilde{M}_{MS}(\varphi, \dot{\varphi}), \quad \hat{M}_Z(\dot{\varphi}) \gg \tilde{M}_Z(\varphi, \dot{\varphi}),$$

a vztahy (4.2) můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} I_{red}(\varphi) &= \hat{I}_{red} + \tilde{I}_{red}(\varphi) = \hat{I}_{red} \left[1 + \frac{\tilde{I}_{red}(\varphi)}{\hat{I}_{red}} \right] \approx \hat{I}_{red}, \\ M_{MS}(\varphi, \dot{\varphi}) &= \hat{M}_{MS}(\dot{\varphi}) \left[1 + \frac{\tilde{M}_{MS}(\varphi, \dot{\varphi})}{\hat{M}_{MS}(\dot{\varphi})} \right] \approx M_{MS}(\dot{\varphi}), \\ M_Z(\varphi, \dot{\varphi}) &= \hat{M}_Z(\dot{\varphi}) \left[1 + \frac{\tilde{M}_Z(\varphi, \dot{\varphi})}{\hat{M}_Z(\dot{\varphi})} \right] \approx M_Z(\dot{\varphi}), \end{aligned} \quad (5.204)$$

tj. jako funkce, které závisí pouze na hodnotách úhlové rychlosti výstupního hřídele motoru. Použijeme-li výše uvedeného předpokladu v pohybových rovnicích (5.1), dostaneme soustavu diferenciálních rovnic 1. řádu ve tvaru

$$\begin{aligned} I_{red} \dot{\omega} &= M_M(t) - M_Z(\omega), \\ \tau_M \dot{M}_M(t) + M_M(t) &= M_{MS}(\omega), \end{aligned} \quad (5.205)$$

kde byla zavedena substituce

$$\omega = \dot{\varphi}, \quad \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (5.206)$$

Úpravou první rovnice (5.205) dostaneme následující výraz pro neznámou M_M

$$M_M(t) = I_{red} \dot{\omega} + M_Z(\omega), \quad (5.207)$$

jejíž časovou derivací obdržíme

$$\dot{M}_M(t) = I_{red} \ddot{\omega} + \frac{dM_Z(\omega)}{d\omega} \dot{\omega},$$

což po dosazení do druhé rovnice (5.205) dává

$$\ddot{\omega} + \frac{I}{\tau_M I_{red}} \left[I_{red} + \frac{dM_Z(\omega)}{d\omega} \tau_M \right] \dot{\omega} + \frac{M_Z(\omega) - M_M(\omega)}{\tau_M I_{red}} = 0, \quad (5.208)$$

tj. jednu obyčejnou nelineární diferenciální rovnici 2.řádu, která popisuje přechodové děje probíhající v pohonové soustavě vzhledem k proměnné ω (úhlové rychlosti výstupního hřídele motoru).

5.4.1. Doba rozběhu pohonové soustavy

Při vyšetřování doby rozběhu t_R pohonové soustavy musíme vycházet z pohybové rovnice (5.208), která je však nelineární diferenciální rovnicí 2.řádu. Jelikož nalezení řešení této rovnice v uzavřeném tvaru není možné, pokusíme se nalézt alespoň přibližné řešení, které by bylo dostatečně přesné jak z hlediska kvantitativního, tak také z hlediska kvalitativního, přičemž jako nejrychlejší cesta k tomuto cíli se jeví zanedbání dynamických vlastností hnacího motoru, reprezentovaných časovou konstantou motoru τ_M , tj. položením $\tau_M = 0$.

Dříve než přistoupíme k přibližnému řešení pohybové rovnice (5.208), tj. odvození vztahu pro dobu rozběhu t_R pohonové soustavy, za předpokladu zanedbání dynamických vlastností hnacího motoru, stanovíme si podmínky, za kterých je tento předpoklad oprávněný. Za tím účelem vyjdeme z dynamické charakteristiky motoru, definované druhou rovnicí v soustavě (5.205), ve které položíme $M_{MS}(\varphi, \dot{\varphi}) = I$, takže

$$\tau_M \dot{M}_M(t) + M_M(t) = I, \quad M_M(0) = 0, \quad (5.209)$$

tj. budeme vyšetřovat časový průběh momentu motoru při odezvě na jednotkovou skokovou funkci. Řešení rovnice (5.209) při odpovídající počáteční podmínce má tvar

$$M_M(t) = I - \exp\left(-\frac{t}{\tau_M}\right), \quad (5.210)$$

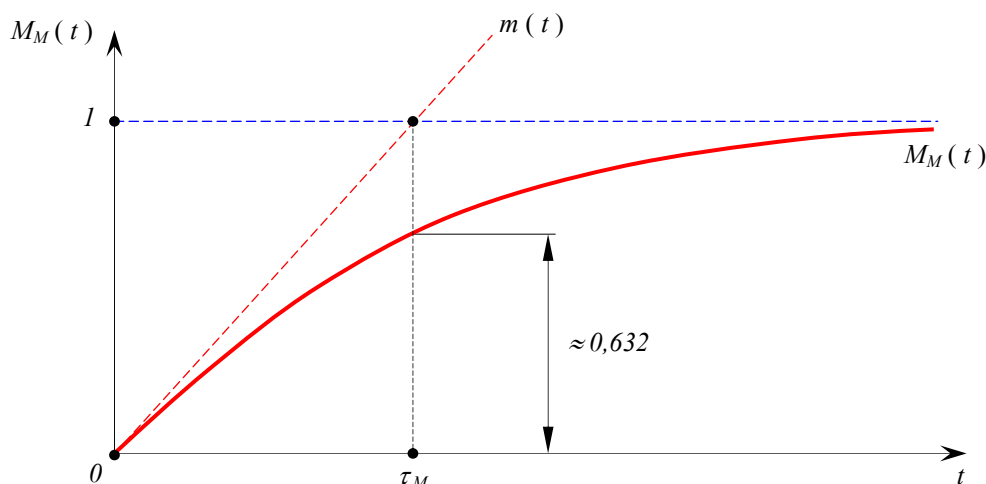
jehož grafické znázornění je uvedeno na obr.90. V časovém okamžiku $t = \tau_M$ nabývá moment motoru hodnoty

$$M_M(\tau_M) = I - e^{-1} \approx 0,632,$$

takže dosahuje 63,2 % své hodnoty v ustáleném stavu, tzn. že platí

$$M_M(\tau_M) \approx 0,632 \lim_{t \rightarrow \infty} M_M(t). \quad (5.211)$$

Sestrojíme-li nyní přímku $m(t)$ procházející počátkem a protínající jednotkovou skokovou funkci v čase $t = \tau_M$, lze pro ni odvodit následující funkční předpis



Obr.90. Časový průběh momentu motoru při odezvě na jednotkovou skokovou funkci

$$m(t) = k_m t = \frac{t}{\tau_M} \Rightarrow k_m = \frac{1}{\tau_M}. \quad (5.212)$$

Uvážíme-li nyní, že směrnice tečny k časovému průběhu momentu motoru $M_M(t)$ je dána následujícím výrazem

$$\frac{dM_M(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_M} \exp\left(-\frac{t}{\tau_M}\right),$$

tj. exponenciálně klesá s rostoucím časem, pak v čase $t = 0$ nabývá své maximální hodnoty

$$\left[\frac{dM_M(t)}{dt} \right]_{t=0} = \frac{1}{\tau_M}, \quad (5.213)$$

která je totožná s hodnotou směrnice přímky $m(t)$, což znamená, že přímka $m(t)$, daná funkčním předpisem (5.212), představuje tečnu k časovému průběhu momentu motoru $M_M(t)$ v bodě $t = 0$. Z toho tedy vyplývá, že tečna k časovému průběhu momentu motoru $M_M(t)$, při jeho odezvě na jednotkovou skokovou funkci, nabývá jednotkové hodnoty v čase $t = \tau_M$, přičemž v tomto časovém okamžiku je hodnota momentu motoru rovna 63,2 % své ustálené hodnoty (viz. vztah (5.211)). To znamená, že časová konstanta motoru τ_M představuje **charakteristickou dobu odezvy motoru** a je tedy významnou charakteristikou motoru, specifikující jeho dynamické vlastnosti při přechodových jevech probíhajících v motoru. Na základě výše uvedeného rozboru dynamických vlastností motoru můžeme tedy přistoupit ke stanovení podmínek, kdy lze při vyšetřování přechodových jevů probíhajících v pohonových soustavách dynamické vlastnosti motoru zanedbat. Za tím účelem vyjdeme z rovnice (5.210), popisující odezvu motoru na jednotkovou skokovou funkci, přičemž s ohledem na asymptotické vlastnosti této rovnice (odezva motoru dosáhne své ustálené hodnoty za nekonečně dlouhý časový interval) pokládejme přechodový děj za ukončený v takovém časovém okamžiku t_0 , ve kterém odezva motoru na jednotkovou skokovou funkci dosáhne 95 % své ustálené hodnoty, tj.

$$M_M(t_0) = 0,95 \lim_{t \rightarrow \infty} M_M(t),$$

což po dosazení do (5.210) dává rovnici

$$M_M(t_0) = 1 - \exp\left(-\frac{t_0}{\tau_M}\right) \Rightarrow 0,95 = 1 - \exp\left(-\frac{t_0}{\tau_M}\right),$$

jejímž řešením obdržíme pro hodnotu t_0 následující výraz

$$t_0 = \tau_M \ln 20 \doteq 3 \tau_M, \quad (5.214)$$

z něhož vyplývá, že odezva motoru na jednotkovou skokovou funkci nabývá z praktického hlediska své ustálené hodnoty v čase rovnajícím se trojnásobku časové konstanty motoru τ_M , tj. **přechodové děje probíhající v motoru lze z praktického hlediska považovat za ukončené po uplynutí časového intervalu rovnajícímu se trojnásobku velikosti časové konstanty τ_M .**

Představme si, že známe časový průběh úhlové rychlosti $\omega(t)$ výstupního hřídele motoru během doby t_R trvání přechodového děje pohonové soustavy, potom rozdělíme-li celkovou dobu t_R trvání přechodového děje na deset intervalů o délce t_0 (tj. $t_R = 10 t_0$) můžeme s dobrým přiblížením předpokládat, že během jednoho časového intervalu t_0 se mění úhlová rychlost ω lineárně s časem t a také statická momentová charakteristika motoru lineárně závisí na úhlové rychlosti ω (celý postup je schématicky znázorněn na obr.91). To tedy znamená, že během tohoto jediného časového inter-valu $t \in (t_i, t_{i+1}) = (t_i, t_i + t_0) = (0, t_0)$ je časová změna momentu motoru vyjádřena pomocí dyna-mické momentové charakteristiky (viz. druhá rovnice soustavy (5.205)), kde však na pravé straně této rovnice je místo statické momentové charakteristiky motoru pouze konstanta, která je rovna velikosti momentu motoru na konci tohoto časového intervalu, tj.

$$\tau_M \dot{M}_M(t) + M_M(t) = M_{i+1}, \quad M_M(0) = M_i, \quad (5.215)$$

přičemž $M_i = M_{MS}(\omega_i)$, resp. $M_{i+1} = M_{MS}(\omega_{i+1})$ je velikost momentu motoru na začátku, resp. na konci tohoto časového intervalu. Vztah (5.215) nám tedy definuje rovnici pro určení odezvy motoru na jednotkovou skokovou funkci o zesílení M_{i+1} .

Řešením rovnice (5.215), např. metodou variace konstanty, dospějeme k vyjádření časové odezvy motoru na skokovou funkci ve tvaru

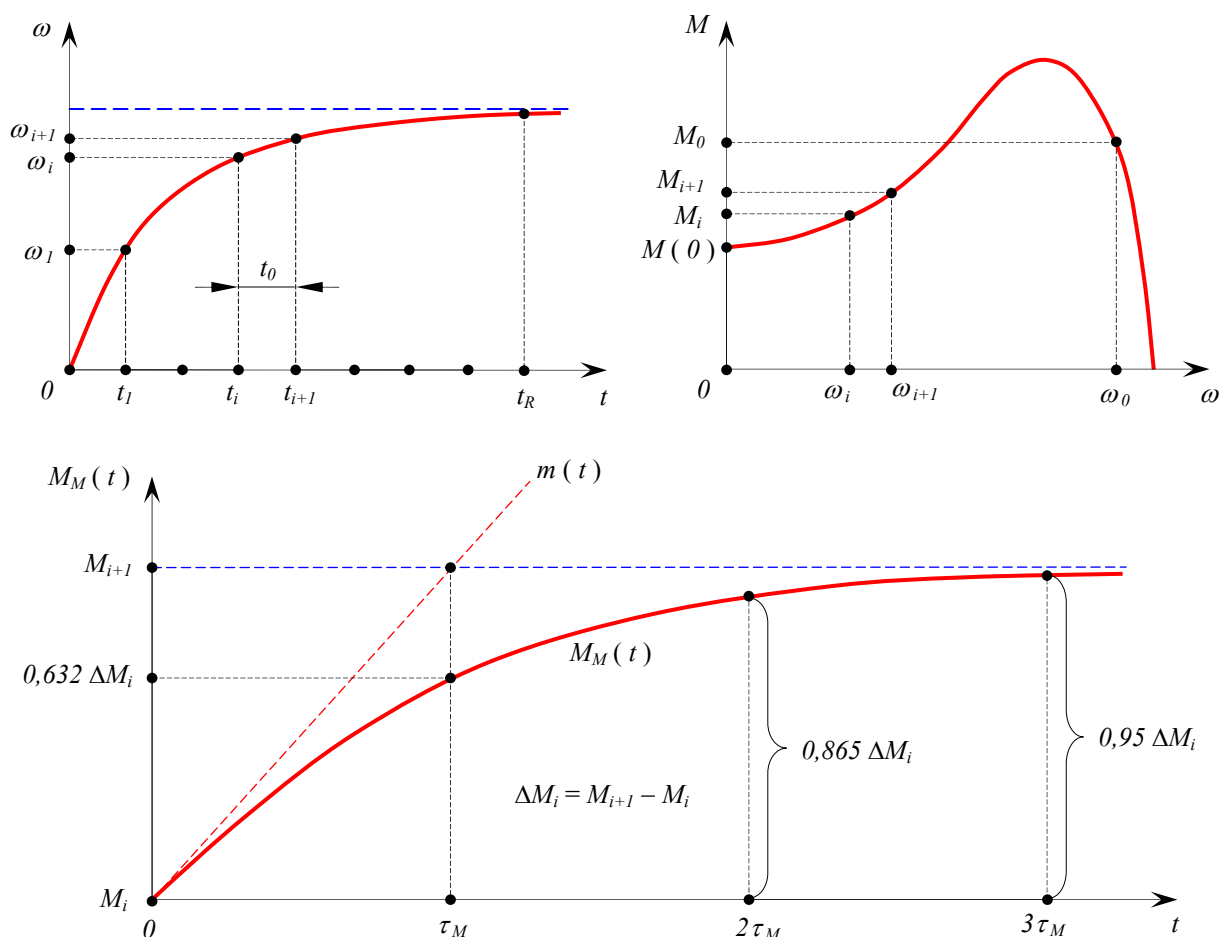
$$M_M(t) = M_{i+1} - \Delta M_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_M}\right), \quad (5.216)$$

kde $\Delta M_i = M_{i+1} - M_i = M_{MS}(\omega_{i+1}) - M_{MS}(\omega_i)$ vyjadřuje přírůstek momentu motoru během tohoto časového intervalu $t \in (t_i, t_{i+1}) = (t_i, t_i + t_0) = (0, t_0)$. Časový průběh řešení (5.216) je znázorněn na obr.63 a je prakticky totožný s časovým průběhem momentu motoru při odezvě na jednotkovou skokovou funkci, což je pochopitelné, uvědomíme-li si, že rovnice (5.216) vyjadřuje časový průběh momentu motoru při odezvě také na jednotkovou skokovou funkci avšak se zesílením o velikosti M_{i+1} . Vezmeme-li nyní v úvahu dříve zjištěný poznatek, že přechodové děje probíhající v hnacím motoru jsou z praktického hlediska ukončeny po uplynutí časového intervalu rovnajícímu se

trojnásobku velikosti časové konstanty τ_M motoru (viz. vztah (5.214)), potom pro velikost časové konstanty motoru τ_M musí platit následující podmínka

$$t_0 \geq 3 \tau_M \Rightarrow t_R \geq 30 \tau_M, \quad (5.217)$$

kterou můžeme považovat za jisté **kvantitativní kritérium zanedbatelnosti dynamických vlastností hnacího motoru** při vyšetřování přechodových dějů probíhajících v pohonových soustavách.



Obr.91. K vysvětlení podmínek zanedbatelnosti dynamických vlastností hnacího motoru.

Předpokládejme nyní, že podmínka (5.217) je splněna (tj. dynamické vlastnosti hnacího motoru mají zanedbatelný vliv na celkovou dobu trvání přechodového děje), pak můžeme s velmi dobrým přiblížením položit

$$M_M(t) \doteq M_{MS}(\omega),$$

což po dosazení do (5.205) dává zjednodušenou pohybovou rovnici ve tvaru

$$I_{red} \dot{\omega} = M_{MS}(\omega) - M_Z(\omega),$$

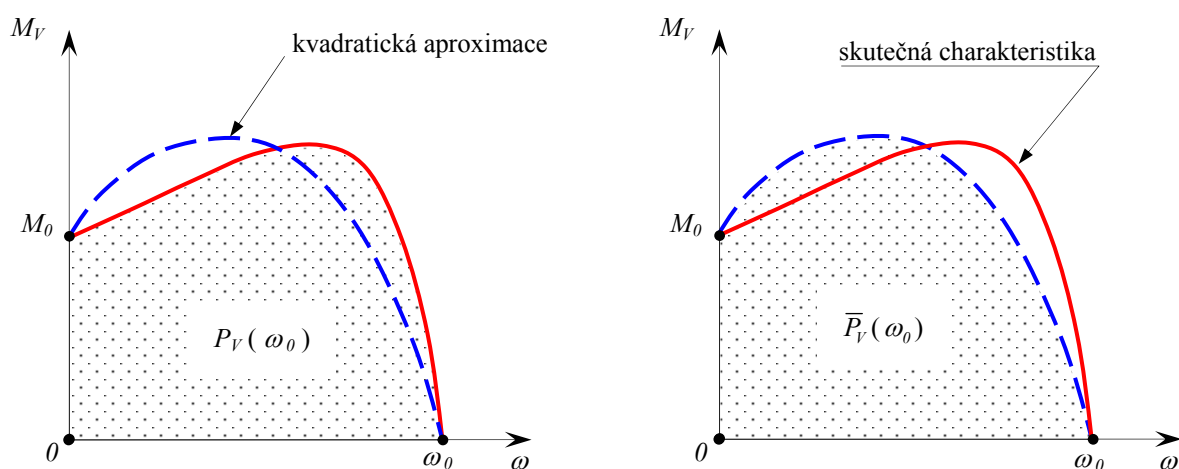
kterou si separací proměnných převedeme na tzv. kanonický tvar

$$\frac{d\omega}{M_V(\omega)} = \frac{dt}{I_{red}}, \quad (5.218)$$

kde $M_V(\omega) = M_{MS}(\omega) - M_Z(\omega)$ je tzv. **výsledná statická momentová charakteristika pohonové soustavy**, která je definována jako rozdíl statické momentové charakteristiky motoru a pracovního stroje. Je zřejmé, že i v tomto případě, kdy diferenciální rovnice (5.218) je poměrně velmi jednoduchá, je možné nalézt řešení v uzavřeném tvaru pouze pro dosti omezenou třídu funkcí $M_V(\omega)$. Z tohoto důvodu budeme řešit rovnici (5.218) přibližným způsobem tak, že původní tvar statické momentové charakteristiky pohonové soustavy nahradíme její vhodnou aproximací, která již umožní přímé řešení rovnice (5.218) a tedy stanovení doby rozběhu pohonové soustavy. My se v této práci omezíme pouze na aproximaci kvadratickou, jejíž základní princip je založen na zachování výkonového toku pohonovou soustavou během doby trvání přechodového děje a na shodnosti funkčních hodnot původní a aproximované statické momentové charakteristiky pohonové soustavy ve vybraných bodech. Při aproximaci skutečné výsledné statické momentové charakteristiky pohonové soustavy její kvadratickou závislostí, která má v obecném případě tři nenulové koeficienty, tedy požadujeme, aby tato kvadratická závislost splňovala následující tři požadavky :

- statická momentová charakteristika pohonové soustavy a její kvadratická aproximace nabývají totožných hodnot v bodech $\omega = 0$ a $\omega = \omega_0$, přičemž ω_0 je úhlová rychlost výstupního hřídele motoru v rovnovážném stavu pohonové soustavy,
- výkonový tok pohonovou soustavou během doby trvání přechodového děje musí být pro skutečnou výslednou statickou momentovou charakteristiku a její kvadratickou aproximaci stejný, tj. plocha pod skutečnou výslednou statickou momentovou charakteristikou a její kvadratickou aproximací, jenž je omezena hodnotami $\omega = 0$ a $\omega = \omega_0$, bude v souřadnicovém systému (ω, M) totožná.

Výše uvedené tři požadavky, kladené na kvadratickou aproximaci skutečné statické momentové charakteristiky pohonové soustavy, mají velmi názornou geometrickou interpretaci, která je uvedena na obr.92.



Obr.92. Princip kvadratické aproximace statické momentové charakteristiky pohonové soustavy.

Odvoďme si nyní vztahy pro kvadratickou aproximaci výsledné statické momentové charakteristiky pohonové soustavy. Předpokládejme, bez újmy na obecnosti, že výsledná statická momentová charakteristika pohonové soustavy má průběh nakreslený na obr.92. Kvadratickou aproximaci této charakteristiky předpokládáme ve tvaru

$$\bar{M}_V(\omega) = a_2 \omega^2 + a_1 \omega + a_0, \quad (5.219)$$

kde neznámé konstanty a_0 , a_1 a a_2 stanovíme na základě výše uvedených požadavků, které můžeme matematicky zapsat takto

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \omega = 0 : \quad \bar{M}_V(0) = M_0, \\ \text{II.} \quad & \omega = \omega_0 : \quad \bar{M}_V(\omega_0) = 0, \\ \text{III.} \quad & P_V(\omega_0) = \bar{P}_V(\omega_0) : \quad \int_0^{\omega_0} M_V(\omega) d\omega = \int_0^{\omega_0} \bar{M}_V(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (5.220)$$

kde M_0 je hodnota výsledné statické momentové charakteristiky pohonové soustavy v bodě $\omega = 0$, tj. $M_V(0) = M_0$, přičemž veličina $P_V(\omega_0)$, resp. $\bar{P}_V(\omega_0)$ představuje výkonový tok pohonovou soustavou během přechodového děje pro skutečnou výslednou statickou momentovou charakteristiku pohonové soustavy, resp. pro kvadratickou aproximaci této statické momentové charakteristiky. Dosazením vztahu (5.219) za kvadratickou aproximaci statické momentové charakteristiky pohonové soustavy do podmínek (5.220), dostaneme pro neznámé koeficienty a_0 , a_1 a a_2 tento systém lineárních rovnic

$$\bar{M}_V(0) \equiv a_0 = M_0,$$

$$\bar{M}_V(\omega_0) \equiv a_2 \omega_0^2 + a_1 \omega_0 + a_0 = 0,$$

$$\int_0^{\omega_0} \bar{M}_V(\omega) d\omega \equiv \frac{1}{3} a_2 \omega_0^3 + \frac{1}{2} a_1 \omega_0^2 + a_0 \omega_0 = \int_0^{\omega_0} M_V(\omega) d\omega \equiv P_V(\omega_0),$$

jehož řešením obdržíme pro koeficienty a_0 , a_1 a a_2 následující výrazy

$$a_0 = M_0,$$

$$a_1 = \frac{6}{\omega_0^2} \int_0^{\omega_0} M_V(\omega) d\omega - \frac{4M_0}{\omega_0} = 2 \frac{3P_V(\omega_0) - M_0 \omega_0}{\omega_0^2}, \quad (5.221)$$

$$a_2 = \frac{3M_0}{\omega_0^2} - \frac{6}{\omega_0^3} \int_0^{\omega_0} M_V(\omega) d\omega = 3 \frac{M_0 \omega_0 - 2P_V(\omega_0)}{\omega_0^3},$$

čímž je kvadratická aproximace (5.219) výsledné statické momentové charakteristiky pohonové soustavy jednoznačně určena.

Dobu rozběhu t_R pohonové soustavy pak stanovíme řešením diferenciální rovnice (5.218), do které však dosadíme místo statické momentové charakteristiky pohonové soustavy $M_V(\omega)$ její kvadratickou aproximaci $\bar{M}_V(\omega)$ danou výrazem (5.219), tj. řešením rovnice

$$\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{a_0 + a_1 \omega + a_2 \omega^2} = \int_0^t \frac{dt}{I_{red}}. \quad (5.222)$$

Uvážíme-li nyní, že platí

$$a_1^2 - 4 a_0 a_2 = 4 \left[\frac{3 P_V(\omega_0) - M_0 \omega_0}{\omega_0^2} \right]^2 > 0,$$

potom po integraci rovnice (5.222) dostáváme

$$\frac{\sqrt{a_1^2 - 4 a_0 a_2}}{I_{red}} t = \ln \left| \frac{2 a_2 \omega + a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4 a_0 a_2}}{2 a_2 \omega + a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4 a_0 a_2}} \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4 a_0 a_2}}{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4 a_0 a_2}} \right|,$$

odkud po dosazení za jednotlivé veličiny a elementárních úpravách obdržíme

$$t = \frac{E_K(\omega_0)}{3 P_V(\omega_0) - M_0 \omega_0} \cdot \ln \left| \frac{2 + 3 \frac{3 P_V(\omega_0) - M_0 \omega_0}{M_0 \omega_0} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega}{\omega_0}} \right|, \quad (5.223)$$

kde veličina $E_K(\omega_0)$ je dána výrazem

$$E_K(\omega_0) = \frac{I}{2} I_{red} \omega_0^2, \quad (5.224)$$

a představuje nám kinetickou energii pohonové soustavy v rovnovážném stavu.

Provedeme-li ve vztahu (5.223) limitní přechod $\omega \rightarrow \omega_0$, potom pro dobu rozběhu t_R pohonové soustavy platí

$$t_R = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{E_K(\omega_0)}{3 P_V(\omega_0) - M_0 \omega_0} \cdot \ln \left| \frac{2 + 3 \frac{3 P_V(\omega_0) - M_0 \omega_0}{M_0 \omega_0} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega}{\omega_0}} \right| = \infty,$$

což znamená, že rovnovážného stavu $\omega(t) = \omega_0$ dosáhne pohonová soustava za nekonečně dlouhý časový interval, tj. pro $t \rightarrow \infty$. V praktických případech však pohonová soustava dosáhne rovnovážného stavu během konečného časového intervalu a proto byla zavedena následující konvence: Rozběh pohonové soustavy považujeme prakticky za ukončený v okamžiku, kdy úhlová rychlost výstupního hřídele motoru dosáhne 95 % hodnoty požadované úhlové rychlosti ω_0 rovnovážného stavu pohonové soustavy. Zavedeme-li si na základě této konvence poměrný koeficient vzdálenosti δ okamžité hodnoty úhlové rychlosti $\omega(t)$ od hodnoty úhlové rychlosti ω_0 v rovnovážném stavu pomocí vztahu

$$\delta = \frac{\omega_0 - \omega(t)}{\omega_0}, \quad (5.225)$$

potom při ukočeném přechodovém ději platí

$$\delta_{95} = \frac{\omega_0 - 0,95 \omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{20} = 0,05. \quad (5.226)$$

S využitím poměrného koeficientu δ , definovaného rovnicí (5.225), lze vztah (5.223) pro výpočet doby trvání přechodového děje v pohonové soustavě psát ve tvaru

$$t = \frac{E_K(\omega_0)}{3P_V(\omega_0) - M_0 \omega_0} \cdot \ln \left| \frac{1}{\delta} \left[2 + 3 \frac{3P_V(\omega_0) - M_0 \omega_0}{M_0 \omega_0} (1 - \delta) \right] \right|, \quad (5.227)$$

odkud na základě konvence (5.226) obdržíme pro dobu rozběhu t_R pohonové soustavy výraz

$$\begin{aligned} t_R &= \frac{E_K(\omega_0)}{3P_V(\omega_0) - M_0 \omega_0} \cdot \ln \left| \frac{1}{\delta_{95}} \left[2 + 3 \frac{3P_V(\omega_0) - M_0 \omega_0}{M_0 \omega_0} (1 - \delta_{95}) \right] \right| = \\ &= \frac{E_K(\omega_0)}{3P_V(\omega_0) - M_0 \omega_0} \cdot \ln \left| 40 + 57 \frac{3P_V(\omega_0) - M_0 \omega_0}{M_0 \omega_0} \right|, \end{aligned} \quad (5.228)$$

který poskytuje poměrně velmi dobré kvantitativní výsledky, jak je ukázáno v práci [79].

Poznámka : Jelikož v současné době je nejčastěji používaným motorem asynchronní elektromotor, jehož statická momentová charakteristika je popsána Klossovou rovnicí

$$M_{MS}(\omega) = \frac{2 M_K (\omega_S - \omega_K) (\omega_S - \omega)}{(\omega_S - \omega_K)^2 + (\omega_S - \omega)^2}, \quad (5.229)$$

kde : M_K kritický (maximální) moment,

ω_K kritická úhlová rychlost,

ω_S synchronní úhlová rychlost motoru,

ω okamžitá úhlová rychlost motoru,

přičemž pro synchronní úhlovou rychlost ω_S a časovou konstantu τ_M motoru platí

$$\omega_S = \frac{2\pi}{p} f, \quad \tau_M = \frac{I}{p(\omega_S - \omega_K)},$$

kde p je počet pólových dvojic motoru a kde f je frekvence napájecího napětí statoru. Výkon $P_M(\omega_0)$ asynchronního motoru, který potřebujeme pro výpočet koeficientů a_0 , a_1 , a_2 kvadratické aproximace, můžeme geometricky interpretovat v souřadnicovém systému (θ, ω, M) jakožto obsah plochy pod statickou momentovou charakteristikou motoru, tj.

$$P_M(\omega_0) = \int_0^{\omega_0} M_{MS}(\omega) d\omega,$$

což po dosazení dává

$$P_M(\omega_0) = \int_0^{\omega_0} \frac{2 M_K (\omega_S - \omega_K) (\omega_S - \omega)}{(\omega_S - \omega_K)^2 + (\omega_S - \omega)^2} d\omega,$$

odkud po integraci obdržíme pro výkon $P_M(\omega_0)$ asynchronního motoru výraz

$$P_M(\omega_0) = M_K (\omega_S - \omega_K) \ln \frac{\omega_S^2 + (\omega_S - \omega_K)^2}{(\omega_S - \omega_0)^2 + (\omega_S - \omega_K)^2}, \quad (5.230)$$

který však můžeme psát také v tomto jednodušším tvaru

$$P_M(\omega_0) = M_K S_K \omega_S \ln \frac{1 + S_K^2}{S_0^2 + S_K^2}, \quad (5.231)$$

kde S_K , resp. S_0 je tzv. kritický skluz asynchronního motoru, resp. skluz asynchronního motoru v rovnovážném stavu, přičemž platí

$$S_K = \frac{\omega_S - \omega_K}{\omega_S} = 1 - \frac{\omega_K}{\omega_S}, \quad S_0 = \frac{\omega_S - \omega_0}{\omega_S} = 1 - \frac{\omega_0}{\omega_S}. \quad (5.232)$$

Uvážíme-li nyní, že závislost odporového zatěžujícího momentu pracovního stroje na úhlové rychlosti při jednosměrném otáčení lze poměrně přesně vyjádřit vztahem

$$M_Z(\omega) = M_T + (M_N - M_T) \left(\frac{\omega}{\omega_N} \right)^X, \quad (5.233)$$

kde : M_N zatěžující moment při nominální úhlové rychlosti ω_N ,

M_T moment tření v klidu,

ω_N nominální úhlová rychlost,

ω okamžitá úhlová rychlost,

X exponent určující mechanickou charakteristiku zatížení (nemusí být celé číslo),

potom pro příkon $P_Z(\omega_0)$ pracovního stroje, který také potřebujeme znát pro výpočet koeficientů a_0 , a_1 a a_2 kvadratické aproximace statické momentové charakteristiky pohonové soustavy, platí

$$P_Z(\omega_0) = \int_0^{\omega_0} M_Z(\omega) d\omega,$$

což po dosazení za zatěžující moment $M_Z(\omega)$ ze vztahu (4.233) a následné integraci, pro příkon $P_Z(\omega_0)$ pracovního stroje dává výraz

$$P_Z(\omega_0) = \left\{ M_T + \frac{M_N - M_T}{1 + X} \left(\frac{\omega_0}{\omega_N} \right)^X \right\} \omega_0. \quad (5.234)$$

Na základě znalostí statických momentových charakteristik a výkonu, resp. příkonu motoru, resp. pracovního stroje pak obdržíme pro výsledný moment vztah

$$M_0 \equiv M_V(0) = M_{MS}(0) - M_Z(0) = \frac{2 M_K (\omega_S - \omega_K) \omega_S}{(\omega_S - \omega_K)^2 + \omega_S^2} - M_T,$$

a pro výsledný výkonový tok pohonovou soustavou vztah

$$\begin{aligned} P_V(\omega_0) &\equiv P_M(\omega_0) - P_Z(\omega_0) = \\ &= M_K S_K \omega_S \ln \frac{I + S_K^2}{S_0^2 + S_K^2} - \left\{ M_T + \frac{M_N - M_T}{I + X} \left(\frac{\omega_0}{\omega_N} \right)^X \right\} \omega_0, \end{aligned}$$

které můžeme využít při výpočtu koeficientů a_0 , a_1 , a_2 kvadratické aproximace (5.219).

5.4.2. Doba zastavení pohonové soustavy

Stanovení doby zastavení pohonové soustavy má praktický význam zejména v těch případech, kdy hnací motor přestane z nějakého důvodu (např. výpadek elektrické energie, zničení spojovacích elementů apod.) dodávat potřebný výkon pracovnímu stroji k zajištění jeho požadovaného provozního (rovnovážného) stavu a je tedy nutné daný pracovní stroj uvést co nejrychleji do klidového stavu bez zbytečného ohrožení vnějšího okolí. Jedná se tedy o problém kdy na pohonovou soustavu nepůsobí žádný hnací moment, což znamená, že pohonová soustava je vystavena působení pouze brzdného momentu nebo pouze zatěžujícího momentu pracovního stroje případně jejich kombinací. Z toho tedy vyplývá, že pohybové rovnice (5.205) se zjednoduší do tvaru

$$I_{red} \dot{\omega} = -M_B(\omega) - M_Z(\omega), \quad (5.235)$$

kde $M_B(\omega)$ je brzdný moment a kde $M_Z(\omega)$ je zatěžující moment pracovního stroje (statická momentová charakteristika pracovního stroje), přičemž brzdý moment $M_B(\omega)$ si můžeme vyjádřit v následujícím tvaru

$$M_B(\omega) = m_0 + m_1 \omega + m_2 \omega^2, \quad (5.236)$$

tj. jako součet tří složek, přičemž můžeme konstatovat, že :

- konstantní složka m_0 vyjadřuje složku brzdícího momentu, která má charakter Coulombova (suchého) tření,
- lineární složka $m_1 \omega$ vyjadřuje složku brzdícího momentu, která má charakter kapalinného tření,
- kvadratická složka $m_2 \omega^2$ vyjadřuje složku brzdícího momentu, která má charakter odporu těles při pohybu tekutinami.

Separací proměnných v rovnici (5.235), převedeme tuto na tzv. kanonický tvar

$$\frac{d\omega}{M_C(\omega)} = -\frac{dt}{I_{red}}, \quad (5.237)$$

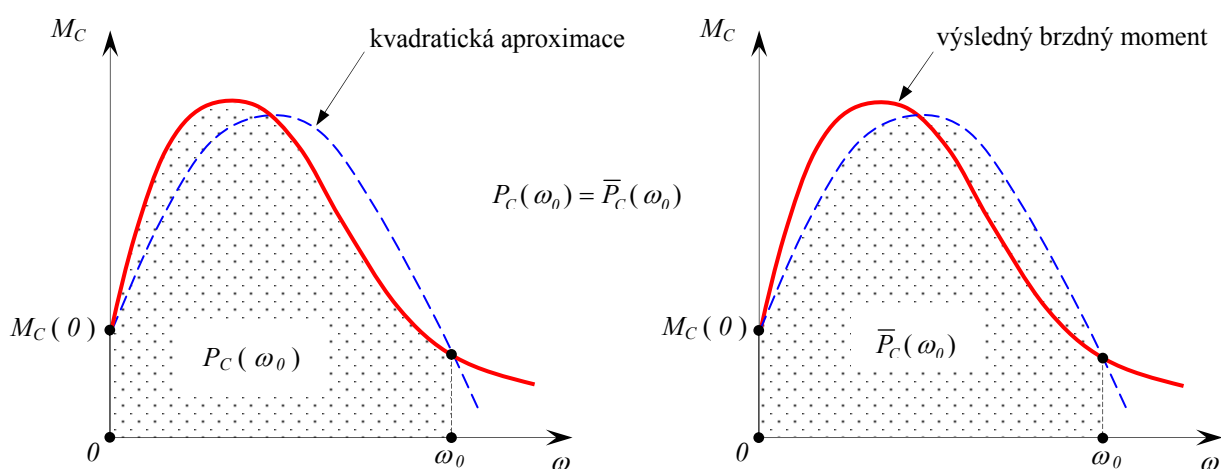
kde $M_C(\omega) = M_B(\omega) + M_Z(\omega)$ je tzv. **výsledný brzdý moment pohonové soustavy**, který je definován jako součet statické momentové charakteristiky pracovního stroje a brzdného momentu

působícího na pohonovou soustavu. Zřejmě i v tomto případě, kdy diferenciální rovnice (5.237) je poměrně velmi jednoduchá, je možné nalézt řešení v uzavřeném tvaru pouze pro dosti omezenou třídu funkcí $M_C(\omega)$. Z tohoto důvodu budeme řešit rovnici (5.237) přibližně, a to tak, že původní tvar výsledného brzdného momentu pohonové soustavy nahradíme její vhodnou aproximací, která již umožní přímé řešení rovnice (5.237) a tedy stanovení doby zastavení pohonové soustavy. Analogicky jako v případě vyšetřování doby rozběhu pohonové soustavy, se při řešení doby zastavení pohonové soustavy omezíme na kvadratickou aproximaci výsledného brzdného momentu pohonové soustavy, jejíž základní princip je založen na zachování výkonového toku pohonovou soustavou během doby trvání přechodového děje a na shodnosti funkčních hodnot původní a aproximované momentové charakteristiky výsledného brzdného momentu pohonové soustavy ve vybraných bodech.

Při aproximaci momentové charakteristiky výsledného brzdného momentu pohonové soustavy její kvadratickou závislostí, která má v obecném případě tři nenulové koeficienty, tedy požadujeme, aby tato kvadratická závislost splňovala následující tři požadavky :

- momentová charakteristika výsledného brzdného momentu pohonové soustavy a její kvadratická aproximace nabývají totožných hodnot v bodech $\omega = 0$ a $\omega = \omega_0$, přičemž ω_0 je úhlová rychlost výstupního hřídele motoru v rovnovážném stavu pohonové soustavy (z tohoto stavu dochází k zastavování pohonové soustavy)
- výkonový tok pohonovou soustavou během doby trvání přechodového děje musí být pro momentovou charakteristiku výsledného brzdného momentu a její kvadratickou aproximaci stejný, tj. plocha pod momentovou charakteristikou výsledného brzdného momentu pohonové soustavy a její kvadratickou aproximací, jenž je omezena hodnotami $\omega = 0$ a $\omega = \omega_0$, bude v souřadnicovém systému $(0, \omega, M)$ totožná.

Výše uvedené tři požadavky, jenž klademe na kvadratickou aproximaci momentové charakteristiky výsledného brzdného momentu pohonové soustavy, mají velmi názornou geometrickou interpretaci, která je uvedena na obr.93.



Obr.93. Princip kvadratické aproximace výsledného brzdného momentu pracovního stroje.

Odvoďme si nyní vztahy pro kvadratickou aproximaci momentové charakteristiky výsledného brzdného momentu pohonové soustavy. Předpokládejme, bez újmy na obecnosti, že momentová charakteristika výsledného brzdného momentu má průběh nakreslený na obr.93. Kvadratickou aproximaci této charakteristiky předpokládáme ve tvaru

$$\bar{M}_C(\omega) = b_2 \omega^2 + b_1 \omega + b_0, \quad (5.238)$$

kde neznámé konstanty b_0 , b_1 a b_2 stanovíme na základě výše uvedených požadavků, které můžeme matematicky zapsat takto

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \omega = 0 : \quad \bar{M}_C(0) = M_C(0), \\ \text{II.} \quad & \omega = \omega_0 : \quad \bar{M}_C(\omega_0) = M_C(\omega_0), \\ \text{III.} \quad & P_C(\omega_0) = \bar{P}_C(\omega_0) : \quad \int_0^{\omega_0} M_C(\omega) d\omega = \int_0^{\omega_0} \bar{M}_C(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (5.239)$$

kde veličina $P_C(\omega_0)$, resp. $\bar{P}_C(\omega_0)$ nám představuje výkonový tok pohonovou soustavou během přechodového děje pro momentovou charakteristiku výsledného brzdného momentu, resp. pro kvadratickou aproximaci tohoto výsledného brzdného momentu. Dosazením vztahu (5.238) do podmínek (5.239), dostaneme pro neznámé koeficienty b_0 , b_1 a b_2 tento systém lineárních rovnic

$$\bar{M}_C(0) \equiv b_0 = M_C(0),$$

$$\bar{M}_C(\omega_0) \equiv b_2 \omega_0^2 + b_1 \omega_0 + b_0 = M_C(\omega_0),$$

$$\int_0^{\omega_0} \bar{M}_C(\omega) d\omega \equiv \frac{1}{3} b_2 \omega_0^3 + \frac{1}{2} b_1 \omega_0^2 + b_0 \omega_0 = \int_0^{\omega_0} M_C(\omega) d\omega \equiv P_C(\omega_0),$$

jehož řešením obdržíme pro koeficienty b_0 , b_1 a b_2 následující výrazy

$$\begin{aligned} b_0 &= M_C(0), \\ b_1 &= \frac{6 P_C(\omega_0)}{\omega_0^2} - 2 \frac{M_C(\omega_0) + 2 M_C(0)}{\omega_0}, \\ b_2 &= -\frac{6 P_C(\omega_0)}{\omega_0^3} + 3 \frac{M_C(\omega_0) + M_C(0)}{\omega_0^2}, \end{aligned} \quad (5.240)$$

čímž je kvadratická aproximace (5.238) momentové charakteristiky výsledného brzdného momentu pohonové soustavy jednoznačně určena.

Dobu zastavení t_z pohonové soustavy potom stanovíme řešením diferenciální rovnice (5.237), do které však dosadíme místo momentové charakteristiky výsledného brzdného momentu pohonové soustavy $M_C(\omega)$ její kvadratickou aproximaci $\bar{M}_C(\omega)$ danou výrazem (5.238), tj. řešením následující rovnice

$$\int_0^t \frac{dt}{I_{red}} = - \int_{\omega}^0 \frac{d\omega}{b_0 + b_1 \omega + b_2 \omega^2} = \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{b_0 + b_1 \omega + b_2 \omega^2}, \quad (5.241)$$

kde charakter integrálu na pravé straně této rovnice závisí na hodnotě diskriminantu kvadratické aproximace (5.238), který je dán výrazem

$$\Delta = b_1^2 - 4 b_0 b_2 = \left[\frac{6 P_c(\omega_0)}{\omega_0^2} - 2 \frac{M_c(\omega_0) + M_c(0)}{\omega_0} \right]^2 - 4 \frac{M_c(\omega_0) M_c(0)}{\omega_0^2}. \quad (5.242)$$

Jesliže diskriminant nabývá záporných hodnot (tj. $\Delta < 0$), potom pro dobu zastavení t_z platí

$$t_z = \frac{2 I_{red}}{\sqrt{-\Delta}} \left[\arctg \frac{2 b_2 \omega_0 + b_1}{\sqrt{-\Delta}} - \arctg \frac{b_1}{\sqrt{-\Delta}} \right], \quad (5.243a)$$

kdežto v případě kladného diskriminantu (tj. $\Delta > 0$) pro dobu zastavení t_z platí

$$t_z = \frac{I_{red}}{\sqrt{\Delta}} \cdot \ln \left| \frac{2 b_2 \omega_0 + b_1 - \sqrt{\Delta}}{2 b_2 \omega_0 + b_1 + \sqrt{\Delta}} \frac{b_1 + \sqrt{\Delta}}{b_1 - \sqrt{\Delta}} \right|. \quad (5.243b)$$

V práci [79] je ukázáno, že vztah (5.243a) resp. (5.243b) poskytuje velmi dobré kvalitativní i kvantitativní výsledky (relativní chyba nepřesahuje 5 % jmenovité hodnoty).

Dodatek – prostředky výpočtového modelování

V technických vědách a v inženýrské praxi je základním zdrojem poznatků o technických systémech a zařízeních experiment. V určitém (omezeném) množství případů je možné takový experiment uskutečnit se skutečným technickým objektem, popř. s jeho fyzickým modelem. U elektromechanických pohonových soustav (dále jen EMPS) se jen zřídka podaří experiment se skutečným pohonem, výstavba fyzického modelu je zpravidla velmi nákladná. Proto se k získání poznatků o EMPS často používá analýza, založená na matematickém modelování, jejímž základním předpokladem je vytváření příslušných matematických modelů. Praktická použitelnost matematických modelů však byla až do nedávné doby omezena pouze na získání analytického řešení, a to zejména u relativně jednoduchých EMPS nebo jeho částí. Teprve mohutný rozvoj výpočetní techniky v posledních dvou desetiletích, včetně příslušného programového vybavení, však umožnil podstatně rozšířit meze řešitelnosti matematických modelů a postupně automatizovat řešení rovnic matematického modelu.

Technickou realizací matematického modelu EMPS je tzv. počítačový model, umožňující sledovat a analyzovat chování EMPS za různých podmínek, odpovídajících jeho skutečnému nebo předpokládanému provozování. To znamená, že při užití počítačového modelu se úloha analytika redukuje na dvě základní činnosti, pomineme-li vlastní spuštění automatizovaného výpočtu :

- 1) vkládání příslušných vstupů do počítačového modelu a
- 2) zpracování získaných výsledků a jejich analýza.

Pro činnosti, spojené s napodobením reálných dějů v EMPS počítačovým modelem, se všeobecně používá označení simulace. Pod tímto pojmem rozumíme všechny fáze procesu získávání poznatků o EMPS, jehož výsledkem je ekvivalence mezi počítačovým modelem a vyšetřovaným systémem jak z hlediska jeho vlastností, tak i z hlediska jeho podstatných projevů. Zde je však třeba zdůraznit, že tato ekvivalence je omezena přesností postačující pro daný účel, tedy výsledky simulací mají pouze omezenou vypovídací schopnost. Hlavními fázemi simulací jsou následující činnosti :

- vymezení dynamického systému na zkoumané EMPS,
- sestavení matematického a následně počítačového modelu,
- ověření shody projevů počítačového modelu s projevy zkoumané EMPS,
- experimenty s počítačovým modelem,
- analýza a aplikace výsledků simulačních experimentů na zkoumanou EMPS.

Je zřejmé, že rozsah činností při simulacích je podstatně širší, než pouhé sestavení matematického modelu a následné odladění modelu počítačového. Věnujme nyní pozornost způsobům matematického modelování a dostupným programovým prostředkům, jež lze využít k simulacím dynamických dějů v EMPS. Pohybové rovnice modelovaného EMPS mohou být odvozeny různými způsoby. Ve výzkumné a inženýrské praxi jsou nejrozšířenější následující dva postupy :

- 1) užití fyzikálních principů a zákonitostí k matematickému popisu dějů, které se ve zkoumané EMPS vyskytují. Pro mechanickou část EMPS lze využít především D'Alambertův princip a Newtonův druhý zákon dynamiky, pro elektrickou část pak Ohmův zákon, Kirchhoffovy zákony a Faradayův zákon elektromagnetické indukce,

2) užití Lagrangeových rovnic a Hamiltonova variačního principu pro obě části EMPS.

Takto získané pohybové rovnice EMPS mají obvykle tvar maticových nebo obecně nelineárních rovnic pro vektory (matice) fyzikálních proměnných nebo pro vektory (matice) tzv. zobecněných proměnných, přičemž jedním z velmi rozšířených způsobů popisu dynamických systémů je tzv. stavový popis, skládající se ze stavové rovnice a z rovnice odezvy systému. K řešení uvedených typů rovnic lze použít různé postupy. Do nedávné doby bylo obvyklé, že pomocí programovacích jazyků FORTRAN nebo PASCAL byl sestaven jednoúčelový počítačový model pro zkoumanou EMPS, jehož výpočtová část obsahovala některou z dostupných a prakticky ověřených procedur pro řešení soustav diferenciálních rovnic nebo algebro-diferenciálních rovnic (Newmark, Euler, Adams, Runge-Kutta apod.). Programátor v takovém případě pouze sestavil příslušné procedury pro zadávání vstupů a pro zvolené způsoby zpřístupnění výsledků výpočtů, včetně jejich vizualizace. Tento přístup k simulacím velmi různorodých konfigurací EMPS byl časově značně náročný a především vyžadoval zkušeného programátora. V současné době jsou k dispozici simulační programy, které lze zařadit do dvou základních skupin. Jsou to :

- 1) obecné výpočtové, resp. simulační programy a
- 2) specializované simulační programy.

Většina obecných simulačních programů je založena na rovnicích, čili jejich vstupy musí mít tvar soustavy diferenciálních nebo algebro-diferenciálních rovnic. Naproti tomu specializované simulační programy nabízejí k okamžitému použití různé knihovny připravených modulů nebo šablon základních prvků pro příslušnou aplikaci nebo si uživatel může takové moduly či šablony sám vytvořit, odladit a poté je přidat do již existující knihovny prvků. Je samozřejmé, že tyto moduly mají zpravidla tvar soustavy rovnic, popisujících modelovaný prvek. Z velkého množství všech dostupných programů se jeví pro potřebu simulací EMPS jako nejvhodnější následující programy : MATLAB[®], Simulink[®], MathCAD[®] a DYNAST[®] a v zahraničí používaný program Simplorer[®].

Matematický program MATLAB[®]

Matematický program MATLAB je obecný číslicový výpočtový program, určený pro vědecké a inženýrské výpočty. S jeho pomocí je možné řešit následující okruhy problémů :

- 1) matematické výpočty všeho druhu v numerické i symbolické podobě,
- 2) podpora měření, simulací, zpracování signálů, analýzy dat apod.,
- 3) vizualizace dat pomocí dvojrozměrné a trojrozměrné grafiky,
- 4) programování zvláštních uživatelských procedur.

Svou podstatou je MATLAB vyšší programovací jazyk, jehož základní datovou formou je matice, který nevyžaduje dimenzování datových struktur, kompilování a zřetězování (linkování) programů, což jsou operace typické pro vyšší programovací jazyky. Veškeré výpočty jsou v něm realizovány pomocí aritmetiky komplexních čísel se zdvojenou přesností (double precision), čímž je zaručena vysoká přesnost výsledků řešení. Integrální součástí MATLABu jsou grafické procedury, zabezpečující jeho bohaté vykreslovací schopnosti. Protože z hlediska uživatele představuje MATLAB programovací prostředí, může uživatel rozšiřovat jeho funkční schopnosti vytvářením vlastních

procedur a pomocných nástrojů. Volitelnou součástí MATLABu je rozsáhlá kolekce nástrojových prostředků (tzv. toolboxy). Jsou to speciální aplikační programy pro různé oblasti užití, např. :

- řídicí a regulační systémy,
- identifikace systémů,
- analýza signálů,
- zpracování obrazů,
- symbolická matematika a další.

Z hlediska simulací dynamických systémů a tedy i EMPS mají prvořadý význam metody integrace lineárních a nelineárních obyčejných diferenciálních a algebro-diferenciálních rovnic, představujících matematický model dynamického systému. Typy těchto metod závisí na konkrétní verzi programu, zde uvedeme metody, které jsou součástí programu MATLAB 5 :

- a) explicitní jednokroková metoda Runge-Kutty pátého řádu,
- b) explicitní jednokroková metoda Runge-Kutty třetího řádu,
- c) vícezkroková Adamsova-Bashforthova-Moultonova metoda typu prediktor-korektor proměnného řádu s proměnným počtem kroků,
- d) vícezkroková Gearova metoda typu prediktor-korektor proměnného řádu s proměnným počtem kroků,
- e) jednokroková Rosenbrockova metoda druhého řádu.

Zatímco první tři uvedené metody jsou určeny pro běžné dynamické systémy, jsou poslední dvě metody vhodné především pro dynamické systémy se silným tlumením (tzv. „tuhé“ systémy), resp. pro dynamické systémy s velkým rozptylem časových konstant.

Aby bylo možné jednotlivé numerické řešiče diferenciálních rovnic, založené na výše charakterizovaných matematických metodách použít, je třeba každou diferenciální rovnici matematického modelu dynamického systému přeformulovat do tzv. normálního tvaru (tj. soustavy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu) a definovat počáteční hodnotu každé proměnné. Je tedy zřejmé že pro využití MATLABu k simulacím je velmi výhodné, aby byl dynamický systém popsán pomocí stavového popisu, tj. stavovou rovnicí a odezvou. To ovšem může vést v některých případech k poměrně složitým operacím, při nichž nelze vyloučit možnost vzniku chyb. Navíc mnohé ze stavových proměnných nemají fyzikální smysl. Proto byla snaha celý proces vytváření počítačového modelu v prostředí MATLABu zjednodušit, popř. usnadnit jeho následnou kontrolu. Tomuto účelu slouží simulační program Simulink®.

Simulační program Simulink®

Jedním z nejužívanějších prostředků, jímž lze znázornit strukturu dynamického systému je tzv. orientovaný graf, jímž rozumíme propojení množiny tzv. uzlů množinou orientovaných spojníc. Orientované grafy mohou přitom mít dvě podoby. Jsou to :

- 1) signálové schéma (Masonův graf, signálový diagram), jehož podstata spočívá v tom, že v uzlech grafu jsou soustředěny proměnné systému a orientované spojnice představují relace mezi proměnnými,

- 2) blokové schéma, v němž uzly, častěji nazývané bloky, představují relace mezi proměnnými systému, reprezentovanými orientovanými spojnici. Přitom každá z těchto spojníc směřuje od bloku, pro nějž je příslušná proměnná vstupem, k následujícímu bloku, ve kterém plní funkci vstupu.

Zatímco signálová schémata se výhodně používají ke znázornění struktury lineárních dynamických systémů (typické je jejich užití v teorii lineárních elektrických obvodů), jsou bloková schémata naprosto univerzální, tedy mohou být užity pro lineární i nelineární dynamické systémy.

Na principu modelování pomocí blokových schémat je založen simulační program Simulink, který je doplňkovým programem MATLABu, využívající jeho matematické, zobrazovací a analytické procedury. Svou podstatou je Simulink interaktivním systémem, určeným pro modelování, simulaci a analýzu spojitých, nespojitých a hybridních lineárních i nelineárních dynamických systémů. Pro účely modelování je vybaven grafickým uživatelským prostředím, které umožňuje sestavovat počítačové modely dynamických systémů ve tvaru blokových schémat pouhou manipulací s příslušnými bloky pomocí počítačové myši. Z toho vyplývá, že v tomto prostředí je počítačový model sestavován obdobně jako při kreslení blokového schématu pomocí šablon a tužky. Tím se výrazně liší od MATLABu, protože po sestavení blokového schématu se automaticky generuje popis počítačového modelu ve formulačním jazyce MATLABu. Knihovna grafických programovacích prostředků Simulinku zahrnuje následující funkční bloky :

- 1) generátory, vhodné zejména pro generování vstupů dynamického systému s nejčastěji se vyskytujícími časovými průběhy (konstanta, skok, harmonický průběh, impulsní průběh, série náhodných čísel, spektrálně omezený bílý šum apod.),
- 2) lineární spojitě členy, jakými jsou např. proporcionální člen, derivační člen, integrační člen apod. Tyto bloky jsou formulovány pomocí přenosů v Laplaceově transformaci,
- 3) nelineární spojitě členy, jako jsou nasycení, pásmo necitlivosti, Coulombovo a viskozní tření, vůle, časové zpoždění apod.
- 4) lineární nespojitě (impulsní) členy, formulované pomocí přenosů v Z-transformaci,
- 5) speciální funkční bloky, zabezpečující např. spektrální a korelační analýzu, regresní analýzu, transformaci souřadných systémů apod.,
- 6) datové bloky, umožňující např. průběžné zobrazování výsledků a řídicích povelů,
- 7) propojovací členy, čili orientované spojnice mezi bloky.

K řešení soustav rovnic počítačového modelu dynamického systému, jakož i k zobrazení výsledků řešení Simulink využívá všechny základní nástroje, obsažené v kmenovém programu MATLAB. Z metod řešení diferenciálních nebo algebro-diferenciálních rovnic je třeba vybrat tu metodu, která řešenému problému nejlépe vyhovuje a dává nejspolehlivější výsledky. V této souvislosti je třeba upozornit na to, že v počítačovém modelu, sestaveném buď v prostředí MATLAB nebo v prostředí Simulink, by měly být odstraněny všechny tzv. algebraické smyčky, které mohou při aplikaci některé z metod řešení soustavy vést ke zhroucení celého výpočtu. K zobrazení výsledků řešení lze využít ty grafické nástroje kmenového programu MATLAB, které mají největší vypovídací schopnosti (plošné grafy v časové oblasti, fázová rovina, trojrozměrné zobrazení apod.). Z uvedeného vyplývá, že program Simulink nemůže existovat samostatně, bez podpory programem MATLAB.

Simulační program DYNAST

Počítačový model dynamického systému lze sestavit nejen na základě matematického modelu, tj. převedením soustavy rovnic do formulačního jazyka použitého simulačního programem, ale také pomocí tzv. metody mnohopólového modelování, jejíž použití je značně rozšířeno zejména v oblasti elektrotechniky a elektroniky, ale nachází stále širší uplatnění i v jiných oblastech vědy a techniky. Její hlavní výhody lze spatřovat zejména v následujícím :

- vychází z podrobně propracovaných metod analýzy elektrických obvodů,
- poskytuje možnost modelovat, simulovat a analyzovat dynamické systémy různé fyzikální podstaty (elektromechanické systémy, elektrohydraulické systémy apod.).

Podstatou metody mnohopólového modelování je chápání dynamického systému jako modelu reálného objektu, v němž probíhá výměna energie (tzv. energetická interakce) mezi jeho jednotlivými částmi v konečném počtu styčných míst, tzv. pólů. Aby bylo možné tyto energetické interakce modelovat a vyšetřovat, je třeba celý dynamický systém dekomponovat do vhodného počtu subsystémů až prvků v závislosti na hloubce jeho předpokládané analýzy. Poté se každý z těchto subsystémů či prvků pomyslně obklopí uzavřenou plochou, která prochází těmi místy, v nichž se daný subsystém či prvek stýká s ostatními subsystémy či prvky a v nichž probíhají energetické interakce. Každému pólu subsystému či prvku se pak přiřadí vždy dvě základní proměnné, a to :

- 1) příčná (spádová) proměnná, vztažená k určitému referenčnímu pólu. V oblasti EMPS jsou typickými příčnými (spádovými) proměnnými translační či úhlová rychlost nebo elektrické napětí,
- 2) podélná (průtoková) proměnná, která příslušným pólem „protéká“. Takovými veličinami jsou pro případ EMPS síla či moment nebo elektrický proud.

V reálných dynamických systémech může v jediném místě styku, tedy v jediném pólu, probíhat vícenásobná energetická interakce různé fyzikální povahy (např. hřídel může přenášet jak rotační, tak také translační pohyb). V takovém případě je samozřejmě třeba tyto různé energetické interakce v počítačovém modelu od sebe oddělit, čili příslušnému pólu přiřadit potřebný počet vzájemně různých příčných a podélných proměnných (v uvažovaném případě translační a úhlovou rychlost jako příčné proměnné a sílu a moment jako podélné proměnné). Z toho plyne, že rozměry vektorů příčných a podélných proměnných mohou být větší, než je počet míst styku v počítačovém modelu.

Metoda mnohopólového modelování se používá při tvorbě počítačového modelu v prostředí simulačního programu DYNAST. Na rozdíl od simulačního programu Simulink má v sobě zabudovány pouze základní prvky, z nichž lze vytvořit počítačové modely libovolně složitých dynamických systému. Jsou to následující prvky :

- 1) prvek typu R, resp. RI, představující nesetřvačný dynamický člen. Takový prvek může být použit například k modelování proporcionálního tlumení nebo elektrického odporu,
- 2) prvek typu L, představující setřvačný dynamický člen. Tento prvek lze použít například pro modelování tuhosti lineárních či torzních pružin nebo k modelování elektrické cívky,
- 3) prvek typu C, představuje další setřvačný dynamický člen. Tento typ prvku může být použit k modelování hmotných setřvačných členů nebo k modelování elektrického kondenzátoru,

- 4) prvek typu E, což je model ideálního zdroje příčné proměnné se zadanou závislostí na čase či jiné veličině. Může být použit k modelování neřízeného nebo řízeného zdroje rychlosti nebo elektrického napětí,
- 5) prvek typu J, což je model ideálního zdroje podélné proměnné se zadanou závislostí na čase či jiné veličině. Může být použit k modelování neřízeného nebo řízeného zdroje síly či momentu nebo elektrického proudu.

Z těchto prvků, jejichž schématické značky jsou v programu DYNAST k dispozici, se na stínítku monitoru PC sestaví tzv. mnohopólové schéma. Protože v analyzovaných dynamických systémech se obvykle vyskytují často se opakující díly a subsystémy, může si uživatel vytvořit vlastní knihovnu makromodelů, které pak jednoduchým způsobem vkládá do mnohopólového schématu. Na základě sestaveného mnohopólového schématu je automaticky vygenerováno jádro počítačového modelu. Protože DYNAST generuje všechny příkazy počítačového modelu současně, odpadají potíže s tzv. algebraickými smyčkami.

K řešení soustavy popisujících rovnic se v programu používá implicitní více kroková integrační Gearova metoda, modifikovaná Rübnerem a Petersonem. Přitom řád metody v rozsahu od 1 do 6, délka integračního kroku a příslušné koeficienty aproximačního polynomu se během výpočtu automaticky optimalizují v závislosti na průběhu řešení tak, aby si výpočet vyžádal co nejkratší dobu při respektování přípustné zbytkové chyby integrace. Navíc jsou koeficienty aproximačního polynomu voleny vždy tak, aby řešení bylo numericky stabilní i pro případy dynamických systémů s velkým rozptylem velikostí časových konstant čili s velkým rozptylem tlumení v jednotlivých subsystémech. Výsledky numerických výpočtů ukládá program DYNAST do výstupních souborů ve formě tabulek, které lze po příslušné konverzi zpracovávat dalšími programy. Kromě toho je v něm zabudována možnost vytváření grafů zjištěných časových i jiných závislostí, k čemuž bohatě využívá schopností operačních systémů řady MS WINDOWS.

Matematický program MathCAD®

Matematický program MathCAD je komplexní nástroj pro řešení různorodých matematických úloh i ryze technických výpočtů, který umožňuje provádět zcela profesionální řešení. Velkou didaktickou a uživatelskou výhodou je způsob zápisu; veškeré výrazy, konstanty, proměnné, doprovodné texty či grafy jsou zapisovány a zobrazovány na volné ploše (a jejich jednotlivých listech), jako by byly zapisovány na tabuli nebo do sešitu. Zásadním přínosem je tak nejen maximální přehlednost, ale také funkční návaznost. Vše, co je uvedeno a definováno „výše“ (na předchozích stranách či výše na témže listě), je okamžitě použitelné v dalších vztazích. Z dokumentu je tak postupně jeden velký funkční celek, v jehož vztazích díky přehlednému zobrazení neztrácíte orientaci, a použití grafického rozhraní se tím stává účelným krokem. Zapsaná úloha je potom zároveň vhodná přímo pro tisk, takže bez požití lze přímo vyrobit „papírovou“ dokumentaci. MathCAD umožňuje prakticky veškeré běžné matematické výpočty, jež jsou řešeny numericky. Lze jej tedy použít buď jako velmi zdatný kalkulátor, nebo s ním řešit úlohy z vyšší matematiky či řešit velmi složité soustavy rovnic a matice. Velmi důležité jsou možnosti „vizualizace“ výpočtů, proto jsou k dispozici grafy jak statické, tak animované (reálné zobrazení funkcí proměnných s časem). Silný aparát je připraven pro řešení jak samostatných soustav diferenciálních, algebraických či integrálních rovnic, tak

také pro smíšené soustavy algebro-diferenciálních, algebro-integrálních či integro-diferenciálních rovnic. Velkou výhodou je také automatická práce s jednotkami, která je neocenitelná v případě fyzikálních či technických výpočtů, kdy MathCAD automaticky provádí rozměrovou kontrolu všech vztahů a automaticky převádí zadané vstupní údaje v určitých rozměrových jednotkách do předem zvolené soustavy jednotek (např. soustava jednotek SI).

Opravdu silný nástroj činí z MathCADu schopnost pracovat symbolicky, tedy řešit úlohy algebraicky. Jedná se např. o roznásobování závorek, rozvoj binomické věty či řešení soustavy lineárních rovnic. Aplikace však umí také derivovat, integrovat, rozvíjet řady či počítat determinanty matic. Výsledky jsou samozřejmě opět zobrazovány symbolicky, a tím je uživateli umožněno hledat principiálně přesné řešení, pokud takové ovšem existuje.

V případě vyčerpání možností interaktivního přístupu, nabízí MathCAD možnost v samotné aplikaci programovat. Tento přístup lze doporučit především v případech, kdy potřebujeme při výpočtech používat cykly či větvení, a také při definování komplikovanějších funkcí. Samotný zdrojový text programu se opět zapisuje přímo do listu dokumentu a stává se tak naprosto přirozenou součástí řešené úlohy.

Pro tvorbu rozsáhlých dokumentů, jež pro výpočet využívají např. externí zdroje dat, je určen modul MathConnex. Jeho úkolem je propojit dokumenty samotné aplikace navzájem, případně s jinými zdroji (tabulky v Excelu, výpočetní dokumenty systému MATLAB apod.), a umožnit přehlednou správu takto složitěho systému, přičemž velkou výhodou je, že lze využít kvalitního grafického rozhraní.

Sám o sobě je programový soubor MathCAD velmi schopným nástrojem, jehož základy se lze velmi rychle naučit. Aby bylo možné využít maximum možností tohoto programového souboru, je kromě klasické nápovědy k dispozici „studijní“ pomůcka s odpovídajícím jménem Resource Center (tedy „Centrum zdrojů“). Zde je možné nalézt řadu velmi užitečných informací a příkladů, takže se uživatel může seznámit s možnostmi použití aplikace v různých vědních oblastech. Ukázkové úlohy jsou velmi dobře zdokumentované a názorné (včetně grafů a ilustrativních obrázků) a představují tak kvalitní studijní materiál. Komplexním zdrojem znalostí se může stát The Mathcad Treasury, tedy „pokladnice“ matematických vědomostí. Jelikož aplikace matematiky do různých vědních oblastí je prakticky bezbřehá, nabízí firma řadu specializovaných elektronických příruček, jež zahrnují šíři témat od ryze matematického výkladu až po komplikované konstrukční výpočty (stavebnictví, elektrotechnika, energetika apod.).

Aplikační balík MathCAD Professional je velmi kvalitní a propracovaný nástroj určený pro všechny uživatele, kteří narazí na řešení matematických problémů. Jeho koncepce umožňuje nasazení jak v oblasti přírodních věd, tak v aplikační sféře. Je vhodný pro tvorbu vysoce profesionálních vědeckých a technických řešení. K velkým přednostem patří především vysoký výpočetní výkon, kvalitní uživatelské rozhraní, možnost propojení s dalšími aplikacemi a datovými zdroji a velké množství kvalitní dokumentace.

Použitá literatura

- [1] Abgarjan, K.A.: Matričnyje i asymptotičeskije metody v teorii linějnych sistem. Nauka, Moskva, 1973.
- [2] Ajzerman, M.A.; Gantmacher, F.R.: Absolutnaja ustojčivost regulirujemych sistem. Moskva, 1963.
- [3] Amann, H.: Ordinary differential equations. An introduction to nonlinear analysis. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1990.
- [4] Amann, H.: Ordinary differential equations. Walter de Gruyter, Berlin, 1990.
- [5] Barbašin, J.A.: Funkcii Ljapunova. Moskva, 1970.
- [6] Bašta, J.; Chládek, J.; Mayer, I.: Teorie elektrických strojů. SNTL/ALFA, Praha, 1968.
- [7] Blekhman, I.I.: Vibrational mechanics. World scientific, Singapore, 2000.
- [8] Bogoljubov, N.N.; Mitropolskij, J.A.: Asimptotičeskije metody v teorii nelinejnych kolebanij. DIFML, Moskva, 1958.
- [9] Bolotin, V.V.: Použití metod teorie pravděpodobnosti a teorie spolehlivosti při navrhování konstrukcí. SNTL, Praha, 1978.
- [10] Bolšakov, V.I.: Dinamika zamknutoj elektromechaničeskoy sistěmi s nelinejnymi uprugimi svjazami. Sborník Dinamika mašin, Mašinostrojenije, Moskva, 1969.
- [11] Butenin, N.V.; Nejmark, J.I.; Fufajev, N.A.: Vveděnije v teoriju nelinejnych kolebanij. Nauka, Moskva, 1976.
- [12] Cartmell, M.: Introduction to linear, parametric and nonlinear vibrations. Chapman & Hall, London, 1990.
- [13] Cole, J.D.; Kevorkian, J.: Perturbation methods in applied mathematics. Applied mathematical sciences, vol. 34. Springer-Verlag, New York, 1981.
- [14] Černý, M.: Elektrické pohony I, II. SNTL, Praha, 1976.
- [15] Četajev, N.G.: Ustojčivost dviženija. Nauka, Moskva, 1965.
- [16] Děmidovič, B.P.: Lekcii po matematičeskoy teorii ustojčivosti. Nauka, Moskva, 1967.
- [17] Dobiáš, I.: Nelineární dynamické soustavy s náhodnými vstupy. Academia, Praha, 1988.
- [18] Frejdlin, M.I.; Ventcel, A.D.: Fluktuacii v dinamičeskych sistemach pod dějstvijem malych slučajnych vozmuščenij. Nauka, Moskva, 1979.
- [19] Fučík, S.; Kufner, A.: Nelineární diferenciální rovnice. SNTL, Praha, 1978.
- [20] Galaktionov, J.I.; Kartvelišvili, N.A.: Idealizacija složnych dinamičeskych sistem. Nauka, Moskva, 1976.
- [21] Gëldner, K.; Kubík, S.: Nelinejnyje sistemy upravlenija. MIR, Moskva, 1987.
- [22] Gilmore, R.; Lefranc, M.: The topology of chaos. Wiley, New York, 2002.

- [23] Glendinning, P.: Stability, instability and chaos. Cambridge university press, New York, 1994.
- [24] Guckenheimer, J.; Holmes, P.: Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vectorfields. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [25] Guckenheimer, J.; Holmes, P.: Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [26] Haller, G.: Chaos near resonance. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [27] Harris, C. M.: Shock and vibration handbook. McGraw-Hill, New York, 1996.
- [28] Hassard, J.E.; Kazarinoff, N.D.; Wan, Y.H.: Theory and applications of Hopf bifurcation. Cambridge university press, 1981.
- [29] Holodniok, M.; Klíč, A.; Kubiček, M.; Marek, M.: Metody analýzy nelineárních dynamických modelů. Academia, Praha, 1986.
- [30] Holý, J.: Výpočet kmitů elektromechanické soustavy pohonu dmychadla. Sborník konference Dynamické a pevnostní problémy strojnických konstrukcí, SAV, Pezinok, 1983.
- [31] Holý, J.; Kučera, I.: Výpočet torzního kmitání elektromechanického systému blokovny VŘSR. Strojírenství, sv. 38, No 4., 1983.
- [32] Horák, J.; Krlín, L.: Deterministický chaos a matematické modely turbulence. Academia, Praha, 1996.
- [33] Chasminskij, R.Z.: Ustojčivost sistem differencialnyh uravnenij pri slučajnyh vozmuščenijach ich parametrov. Nauka, Moskva, 1969.
- [34] Ioss, G.: Bifurcations of maps and applications. North-Holland publisher company, Amsterdam, 1979.
- [35] Ioss, G.; Joseph, D.D.: Elementary stability and bifurcation theory. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [36] Ivančenko, F.K.: Dinamika i pročnosť prokatnogo oborudovanija. Metallurgija, Moskva, 1970.
- [37] Ivančenko, F.K.; Krasnošapka, V.A.: Dinamika metallurgičeskich mašin. Metallurgija, Moskva, 1983.
- [38] Jordan, D.W.; Smith, P.: Nonlinear ordinary differential equations. Clarendon, Oxford, 1987.
- [39] Kalman, R.E.: Algebraic aspect of the theory of dynamical systems, in: Differential equations and dynamical systems. Academic press, New York, 1967.
- [40] Khalil, H.K.: Nonlinear systems. Third edition. Prentice Hall, New Jersey, 2002.
- [41] Kolovskij, M.Z.: Dinamika mašin. LPI, Leningrad, 1980.
- [42] Krasnošapka, V.A.: Dinamika uprugich sistem s neprerivno diskretnymi parametrami. Naukovaja dumka, Kiev, 1979.

- [43] Krasovskij, N.N.: Někotoryje zadači teoriji ustojčivosti dviženija. FIZMATGIZ, Moskva, 1959.
- [44] Kratochvíl, C.: The modelling of dynamic properties for machinery drive. Proc. of the I-st Conf. of Mechanics, Tom 2, Prague, 1987.
- [45] Kratochvíl, C.: Úvod do problematiky řešení odezvy náhodně buzených diskrétních dynamických systémů. Učební texty pro postgraduální studium aplikované mechaniky, VUT-FS, katedra technické mechaniky, Brno, 1982.
- [46] Kratochvíl, C.; Malenovský, E.: Pohony strojních soustav. Skriptum VUT Brno, Brno, 1990.
- [47] Kropáč, O.: Náhodné jevy v mechanických soustavách. SNTL, Praha, 1987.
- [48] Kropáč, O.: Náhodné procesy v dynamických soustavách. Strojírenství, sv. 31, No 12., 1981.
- [49] Kubík, S.; Kotek, Z.; Razím, M.; Hrušák, J.; Branžovský, J.: Teorie automatického řízení II. SNTL, Praha, 1982.
- [50] Kubík, S.; Kotek, Z.; Strejc, V.; Štecha, J.: Teorie automatického řízení I. SNTL, Praha, 1982.
- [51] Kule, L. a kol.: Technika elektrických pohonů. TP 50. SNTL, Praha, 1983.
- [52] Kümmel, F.: Elektrické pohony. Úlohy a riešenia. ALFA, Bratislava, 1989.
- [53] Kuznetsov, Y.A.: Elements of applied bifurcation theory. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [54] Kuznetsov, Y.A.: Elements of applied bifurcation theory. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [55] Landa, P.S.: Regular and chaotic oscillations. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [56] Letov, A.M.: Ustojčivost nelinejnych regulirujemych sistem. Moskva, 1962.
- [57] Ljapunov, A.M.: Obščaja zadača ob ustojčivosti dviženija. Gostechizdat, 1950.
- [58] Lurje, A.I.: Někotoryje nelinejnyje zadači avtomatičeskovo regulirovanija. GITTL, Moskva, 1951.
- [59] Malkin, I.G.: Teorija ustojčivosti dviženija. GITTL, Moskva, 1952.
- [60] Marsden, J.E.; McCracken, M.: The Hopf bifurcation and its applications. Springer-Verlag, New York, 1976.
- [61] Medveď, M.: Dynamické systémy. VEDA, Bratislava, 1988.
- [62] Merkin, D.R.: Vvedenijev teoriju ustojčivosti dviženija. Nauka, Moskva, 1971.
- [63] Mišun, V.: Dynamika výrobních strojů. Skriptum VUT Brno, Brno, 1991.
- [64] Moon, F.C.: Chaotic vibrations – an introduction for applied scientist and engineers. Wiley, New York, 1987.
- [65] Nagy, J.: Stabilita řešení obyčejných diferenciálních rovnic. MVŠT, sešit XVI., SNTL, Praha, 1983.
- [66] Nayfeh, A.H.; Balachandran, B.: Applied nonlinear dynamics. Wiley, New York, 1995.

- [67] Palis, J.; DeMelo, W.: Geometric theory of dynamical systems – an introduction. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [68] Papastavridis, J.G.: Analytical mechanics. Oxford university press, New York, 2002.
- [69] Peitgen, H.O.; Jürgens, H.; Saupe, D.: Chaos and fractal. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [70] Poliak, F.: Elektrické pohony I. SVTL, Bratislava, 1957.
- [71] Popov, E.P.: Dinamika sistem avtomatičeskovo regulirovanija. Gostechizdat, Moskva, 1954.
- [72] Popov, V.M.: Giperustojčivost avtomatičeskich sistem. Nauka, Moskva, 1970.
- [73] Procházka, F.: Vliv dynamických charakteristik motorů na stabilitu rovnovážných stavů nelineárních pohonových soustav. In. Sborník konference Interakce a zpětné vazby '99, Praha, listopad 23-24, 1999, str.197-207.
- [74] Procházka, F.: Asymptotic stability of automatic regulation of dynamic systems. In. Sborník konference Dynamika strojů 2002, Praha, únor 5-6, str.153.
- [75] Procházka, F.: Diagram řešení-větvení rovnovážných stavů v bifurkačních bodech a jejich klasifikace. Inženýrská mechanika, ročník 8, č. 3, 2001.
- [76] Procházka, F.: Hopfova bifurkace rovnovážných stavů pohonových soustav. In. Sborník konference Inženýrská mechanika 2002, Svratka, květen 13-16, str.241.
- [77] Procházka, F.: Modifikace Lagrangeova energetického kritéria stability pro soustavy s cyklickými souřadnicemi. In. Sborník konference Interakce a zpětné vazby 2001, Praha, listopad 27-28, str.191.
- [78] Procházka, F.: Použití věty o centrální varietě k vyšetřování rovnovážných stavů nelineárních dynamických soustav. Inženýrská mechanika, ročník 8, č. 4, 2001.
- [79] Procházka, F.: Stabilita a bifurkace rovnovážných stavů nelineárních dynamických systémů. Disertační práce. VUT FSI Brno, 2002.
- [80] Procházka, F.; Kratochvíl, C.: Analýza rezonančních a mimorezonančních stavů nelineární pohonové soustavy ve fázové rovině. In. Sborník konference Inženýrská mechanika '97, Svratka, květen 15-18, 1997, díl II., str.193-199.
- [81] Robinson, C.: Dynamical systems – stability, symbolic dynamics and chaos. CRC Press, Boca Raton, 1999.
- [82] Robinson, C.: Dynamical systems, stability, symbolic dynamics and chaos. Second edition. CRC Press, Florida, 1999.
- [83] Schmidt, G.; Tondl, A.: Non-linear vibrations. Akademie-Verlag Berlin, Berlin, 1986.
- [84] Smirnov, V.V.; Jakovlev, R.J.: Mechanika privodov prokatnyh stanov. Metallurgija Moskva, 1970.
- [85] Solodovnikov, V.V.: Osnovy avtomatičeskovo regulirovanija. GNIML, Moskva, 1954.
- [86] Stradiot, J. a kol.: Dynamika strojov. ALFA, Bratislava, 1991.

- [87] Strogatz, S.H.: Nonlinear dynamics and chaos. Perseus books publishing, New York, 1994.
- [88] Thompson, J.M.T.; Stewart, I.: Nonlinear dynamics and chaos. Wiley, New York, 1986.
- [89] Trnka, Z.: Teoretická elektrotechnika. SNTL/ALFA, Praha, 1972.
- [90] Troeder, Ch.; Lashet, A.: Computer aided simulation of torsional and flexural vibrations in machinery. ASME Int. Computers in Engineering, Las Vegas, 1984.
- [91] Troeder, Ch.; Lashet, A.: Einordnung der Simulationsrechnung in der Entwicklungs und Konstruktionsprozes. CAD-CAM Data Book, 1984.
- [92] Valsa, J.; Koukal, S.; Příkryl, H.: Analýza dynamických stavů v regulačních elektrických motorech. KOB-ČS VTS, Společnost elektrotechnická, Brno, 1983.
- [93] Verhulst, F.: Nonlinear differential equations and dynamical systems. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [94] Wiggins, S.: Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [95] Žitomirskij, B.Z.: Razrabotka inženěroj metodiky dinamičeskogo rasčeta privodov sortovyh stanov. Naučno-isledovatělskij i projektno-konstruktorskij institut metallurgičeskogo mašinostrojenija, Moskva. 1980.